УДК 621.396.967

СЛЮСАР В. И.

ТОРЦЕВЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ В РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Введены понятия торцевого и транспонированного торцевого произведения матриц и их модификации, на основе которых получены записи отклика многокоординатных РЛС с цифровыми антенными решетками.

Определение 1. Торцевым произведением $p \times g$ — матрицы $A = [a_{ij}]$ и $p \times s$ — матрицы B, представленной как блок-матрица строк B_i, ($B = [B_i]$, $i = 1, ..., p$) будем называть матрицу $A \square B$ размером $p \times g\,s$, определяемую равенством $A \square B = [a_{ij} \cdot B_i]$.

В качестве примера можно указать аналитическую модель отклика многокоординатной РЛС на базе линейной цифровой антенной решетки (ЦАР). Условимся, что таковая содержит R приемных каналов с характеристиками направленности $Q_r(x)$, где x — направление на источник излучения, причем по выходу каждого приемного канала синтезируется T доплеровских фильтров с амплитудно-частотными характеристиками $F_t(\omega)$, где ω — частота. При воздействии на вход такой системы M источников сигналов, имеющих комплексные амплитуды $\dot{a}_m$, угловые координаты x_m и частоты ω_m, свободное от шумов напряжение по выходу t-го частотного фильтра r-го приемного канала будет представлять сумму:

$$\dot{U}_{tr} = \sum_{m=1}^{M} \dot{a}_m \cdot F_t(\omega_m) \cdot Q_r(x_m). \tag{1}$$

Если сформировать матрицу размером $M \times R$ характеристик направленности приемных каналов $[Q_j(x_i)]$; $j = 1, 2, ..., R$; $i = 1, 2, ..., M$, $M \times T$-матрицу АЧХ доплеровских фильтров $[F_j(\omega_i)]$; $j = 1, 2, ..., T$; $i = 1, 2, ..., M$ и вектор комплексных амплитуд сигналов

$$A = [\dot{a}_1\, \dot{a}_2 \ldots \dot{a}_M]^{\mathrm{T}},$$

то выражение (1) может быть записано в матричном виде с помощью торцевого произведения матриц:

$$U = Q^{\mathrm{T}} (A \square F), \tag{2}$$

с элементами (1).

Аналогичным образом формализуется отклик трехкоординатной РЛС с плоской эквидистантной ЦАР:

$$U = Q^{\mathrm{T}} (A \square F \square V), \tag{3}$$

где V — $M \times R$-матрица характеристик направленности $V_r(y_m)$ R приемных каналов в дополнительной координатной плоскости, U — блочная матрица вида $U = [U_1, ..., U_r, ..., U_R]$ с элементами $\dot{U}_{trn} = \sum\limits_{m=1}^{M} \dot{a}_m \cdot F_t(\omega_m) \cdot Q_r(x_m) \cdot V_n(y_m)$.

Дополнив пеленгационно-доплеровскую селекцию измерением дальности [1] на основании (3) запишем модель четырехкоординатной решетки

$$U = Q^{\mathrm{T}} (A \square F \square V \square S), \tag{4}$$

где S — $M \times D$-матрица откликов D стробов дальности, полученных в результате дополнительного стробирования отсчетов АЦП путем накопления со сбросом [1]. При этом в отличие от (3) в блочной структуре матрицы (4) появляется периодичность, обусловленная наличием четвертого индекса.

Следует отметить, что для двухкоординатного случая (2) существует альтернативная модель в рамках традиционной матричной алгебры, связанная с искусственным приемом «натяжения» вектора амплитуд сигналов A на главную диагональ единичной $M \times M$-матрицы.

Соответствующий аналог (2) имеет вид [2]

$$U = Q^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{diag}\,[a_i] \cdot F, \;\; i = 1, 2, ..., M.$$

Однако при переходе к трех- и четырехкоординатной моделям известный набор матричных операций становится неэффективным.

Введенное здесь торцевое произведение занимает промежуточную нишу между произведением Адамара [3] и прямым (кронекеровским, тензорным) произведением матриц [4]. Его название отражает тот факт, что правая матрица перед умножением на элементы левой как бы расщепляется с торца по строкам.

Следуя принципу симметрии, определение *1* можно дать в виде $A \square B = [A_i \cdot b_{ij}]$. Поскольку в обоих случаях получаются понятия с одинаковыми свойствами, оба определения могли бы быть равно полезными в приложениях. Однако предпочтительнее схема $[a_{ij} B_i]$, как более близкая к прямому произведению [4].

Легко проверяются сочетательное свойство торцевого произведения матриц и его распределительное свойство относительно сложения:

$$(A \square B) \square C = A \square (B \square C), \;\; (A + B) \square C = A \square C + B \square C,$$

$$A \square (B + C) = A \square B + A \square C,$$

$$(A+B) \square (C+D) = A \square C + B \square C + A \square D + B \square D.$$

В этих выражениях предполагается, что число строк у первого и второго сомножителей совпадает.

Как и обычное произведение матриц, торцевое — некоммутативно ($A \square B \neq B \square A$), хотя для векторов коммутативность допустима $a \square b = b \square a$.

Во многих приложениях может быть полезно свойство, связывающее торцевое и прямое произведения квадратных матриц

$$A \otimes (B \square C) = (A \otimes B) \square C.$$

Характерно, что для произведения Адамара такая сочетательность невозможна:

$$A \circ (B \square C) \neq (A \circ B) \square C.$$

Соблюдение необходимой размерности сомножителей является определяющим фактором и для обращения результата торцевого произведения. Операция $(A \square B)^{-1}$ имеет смысл, если для $p \times g$-матрицы A и $p \times s$-матрицы B справедливо тождество $p = s \times g$. В противном случае возможно только обращение по Пенроузу.

Наконец, представляет интерес закон обращения порядка [3]. Если для обычного произведения матриц он формулируется в виде $(A \cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$, то в случае торцевого произведения требуется введение нового понятия — транспонированного торцевого произведения (ТТП).

Определение 2. Транспонированным торцевым произведением $g \times p$-матрицы $A = [a_{ij}]$ и $s \times p$-блок-матрицы столбцов $B = [B_j]$, $j = 1, \ldots, p$, будем называть $g\, s \times p$-матрицу $A \blacksquare B$, определяемую равенством

$$A \blacksquare B = [a_{ij} \cdot B_j].$$

Транспонирование результата торцевого произведения запишется так:

$$(A \square B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \blacksquare B^{\mathrm{T}}.$$

Используя ТТП, можно предложить альтернативный вариант решения задачи аналитического моделирования отклика ЦАР. Вместо соотношений (2)—(4) для тех же матриц Q, F, V, S и вектора A получим

$$\widetilde{U}_{(2)} = (Q^{\mathrm{T}} \blacksquare F^{\mathrm{T}}) \cdot A, \tag{5}$$

$$\widetilde{U}_{(3)} = (Q^{\mathrm{T}} \blacksquare F^{\mathrm{T}} \blacksquare V^{\mathrm{T}}) \cdot A, \tag{6}$$

$$\widetilde{U}_{(4)} = (Q^{\mathrm{T}} \blacksquare F^{\mathrm{T}} \blacksquare V^{\mathrm{T}} \blacksquare S^{\mathrm{T}}) \cdot A. \tag{7}$$

Удобство ТТП для обработки сигналов и анализа точности многокоординатных систем состоит в возможности использования результаты, полученные в рамках традиционного набора действий над матрицами применительно к одно- или двухкоординатным РЛС. Например, используя выкладки [1] и обозначив $P = Q^{\text{т}} \blacksquare F^{\text{т}} \blacksquare V^{\text{т}} \blacksquare S^{\text{т}}$, несложно записать информационную матрицу Фишера для характеристики предельно достижимой точности модели (7)

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \begin{bmatrix} P^{\text{т}} \cdot P & \vdots & (A^* \otimes P^{\text{т}}) \cdot P'_x \\ \cdots\cdots & \cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [P'_x]^{\text{т}} (A \otimes P) & \vdots & [P'_x]^{\text{т}} \cdot (A A^* \otimes 1_{TRRD}) P_x \end{bmatrix},$$

где P — производная Нойдеккера матрицы P по вектору X, составленному из неизвестных параметров сигналов [4], 1_{TRRD} — единичная матрица размерности $T \times R \times R \times D$, $\otimes$ — знак произведения.

Переходя к предельно сложной задаче, на основе нововведенных типов произведений матриц можно формализовать отклик многопозиционной радиолокационной системы из W конформных четырехкоординатных ЦАР, содержащих по G секций каждая.

Различия между секциями и позициями РЛС в характеристиках направленности, АЧХ фильтров и откликах стробов дальности выразим, заменив матрицы $F^{\text{т}}$, $Q^{\text{т}}$, $V^{\text{т}}$ и $S^{\text{т}}$ блочными структурами, в которых $G \times W$ блоков, соответствующих разным секциям и межпозиционным различиям параметров, разместим по вертикали. При этом, например, вместо матрицы характеристик $Q^{\text{т}}$ в (5)–(7) получим блок-матрицу

$$Q^{\text{т}}_{GW} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} \vdots \tilde{Q}_{21} \vdots \ldots \vdots \tilde{Q}_{G_1} \vdots \ldots \vdots \tilde{Q}_{GW} \end{bmatrix}^{\text{т}},$$

$$\tilde{Q}_{nm} = \begin{bmatrix} Q_{1nm}(x_1) & Q_{2nm}(x_1) \ldots Q_{Rnm}(x_1) \\ Q_{1nm}(x_2) & Q_{2nm}(x_2) \ldots Q_{Rnm}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{1nm}(x_M) & Q_{2nm}(x_M) \ldots Q_{Rnm}(x_M) \end{bmatrix}.$$

Аналогичное, согласованное с $Q^{\text{т}}_{GM}$, разбиение на блоки приобретут и блок-матрицы $F^{\text{т}}_{GW}$, $V^{\text{т}}_{GW}$, $S^{\text{т}}_{GW}$. Дальнейшие выкладки требуют введения понятий блочного торцевого произведения (БТП) и транспонированного БТП.

Определение 3. Блочным торцевым произведением $b\, p \times c\, s$-матрицы $A = [A_{ij}]$ и $b\, p \times c\, g$-матрицы $B = [B_{ij}]$ $(i = 1, \ldots, b; j = 1, \ldots, c)$ с согласованным разбиением на блоки размером $p \times s$ и $p \times g$ соответственно будем называть матрицу $A \boxdot B$, определяемую равенством

$$A \boxdot B = [A_{ij} \square B_{ij}]. \tag{8}$$

Знак БТП $\boxdot$ символизирует то обстоятельство, что одноименные блоки матриц берутся для выполнения торцевого умножения ($\square$) по принципу произведения Адамара. Введение отдельной модификации торцевого произведения вместо наложения ограничений на его свойства сохраняет возможность торцевого перемножения блок-матриц, например, с несогласованным разбиением на блоки.

Определение 4. Транспонированным блочным торцевым произведением (ТБТП) $c\, s \times b$ p-матрицы $A = [A_{ij}]$ и $c\, g \times b$ p-матрицы $B = [B_{ij}]$ ($j = 1, ..., c$; $i = 1, ..., b$) с согласованным разбиением на блоки размером $s \times p$ и $g \times p$ соответственно будем называть матрицу $A \circledcirc B$, определяемую равенством $A \circledcirc B = [A_{ij} \blacksquare B_{ij}]$.

Формализуем отклик многопозиционной радиолокационной системы:

$$\tilde{U}_{(4\,G\,W)} = (Q^{\mathrm{T}}_{GW} \circledcirc F^{\mathrm{T}}_{GW} \circledcirc V^{\mathrm{T}}_{GW} \circledcirc S^{\mathrm{T}}_{GW}) \cdot A. \tag{9}$$

В рассмотренном случае ТБТП позволило осуществить формирование четырехкоординатного отклика ЦАР для каждой из G секций W позиций РЛС.

Следует отметить возможность сочетания в рамках одной записи как торцевого, так и транспонированного торцевого произведений с их блочными модификациями. Такой прием позволит компактно упаковать результат умножения в многоблочную структуру, в отличие от векторного представления массивов напряжений, полученного в (5)—(9).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Слюсар В. И.* Синтез алгоритмов измерения дальности M источников при дополнительном стробировании отсчетов АЦП // Радиоэлектроника.— 1996.— № 5.— С. 55—62. (Изв. высш. учеб. заведений).

2. *Слюсар В. И.* Методика пересчета результатов сверхразрешения в оценки других параметров сигналов // Радиоэлектроника.— 1997.— № 5.— С. 74—77. (Изв. высш. учеб. заведений).

3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ / Пер. с англ.— М. : Мир.— 1989.— 655 с.

4. *Калло Тыну.* Матричная производная для многомерной статистики.— Тарту, Тартуский университет, 1991.— С. 24—29.

г. Киев.

Поступила в редакцию 27.12.96.