

ТОРЦЕВЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ В РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Введены понятия торцевого и транспонированного торцевого произведения матриц и их модификации, на основе которых получены записи отклика многокоординатных РЛС с цифровыми антенными решетками.

Определение 1. Торцевым произведением $p \times g$ — матрицы $A = [a_{ij}]$ и $p \times s$ — матрицы B , представленной как блок-матрица строк B_i , ($B = [B_i], i = 1, \dots, p$) будем называть матрицу $A \square B$ размером $p \times g s$, определяемую равенством $A \square B = [a_{ij} \cdot B_i]$.

В качестве примера можно указать аналитическую модель отклика многокоординатной РЛС на базе линейной цифровой антенной решетки (ЦАР). Условимся, что таковая содержит R приемных каналов с характеристиками направленности $Q_r(x)$, где x — направление на источник излучения, причем по выходу каждого приемного канала синтезируется T доплеровских фильтров с амплитудно-частотными характеристиками $F_t(\omega)$, где ω — частота. При воздействии на вход такой системы M источников сигналов, имеющих комплексные амплитуды \dot{a}_m , угловые координаты x_m и частоты ω_m , свободное от шумов напряжение по выходу t -го частотного фильтра r -го приемного канала будет представлять сумму:

$$\dot{U}_{tr} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m \cdot F_t(\omega_m) \cdot Q_r(x_m). \quad (1)$$

Если сформировать матрицу размером $M \times R$ характеристик направленности приемных каналов $[Q_j(x_i)]$; $j = 1, 2, \dots, R$; $i = 1, 2, \dots, M$, $M \times T$ -матрицу АЧХ доплеровских фильтров $[F_j(\omega_i)]$; $j = 1, 2, \dots, T$; $i = 1, 2, \dots, M$ и вектор комплексных амплитуд сигналов

$$A = [\dot{a}_1 \ \dot{a}_2 \ \dots \ \dot{a}_M]^T,$$

то выражение (1) может быть записано в матричном виде с помощью торцевого произведения матриц:

$$U = Q^T (A \square F), \quad (2)$$

с элементами (1).

Аналогичным образом формализуется отклик трехкоординатной РЛС с плоской эквидистантной ЦАР:

$$U = Q^T (A \square F \square V), \quad (3)$$

где V — $M \times R$ -матрица характеристик направленности $V_r(y_m)$ R приемных каналов в дополнительной координатной плоскости, U — блочная матрица вида

$$U = [U_1, \dots, U_r, \dots, U_R] \text{ с элементами } \dot{U}_{irn} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_m \cdot F_i(\omega_m) \cdot Q_r(x_m) \cdot V_n(y_m).$$

Дополнив пеленгационно-доплеровскую селекцию измерением дальности [1] на основании (3) запишем модель четырехкоординатной решетки

$$U = Q^T (A \square F \square V \square S), \quad (4)$$

где S — $M \times D$ -матрица откликов D стробов дальности, полученных в результате дополнительного стробирования отсчетов АЦП путем накопления со сбросом [1]. При этом в отличие от (3) в блочной структуре матрицы (4) появляется периодичность, обусловленная наличием четвертого индекса.

Следует отметить, что для двухкоординатного случая (2) существует альтернативная модель в рамках традиционной матричной алгебры, связанная с искусственным приемом «натяжения» вектора амплитуд сигналов A на главную диагональ единичной $M \times M$ -матрицы.

Соответствующий аналог (2) имеет вид [2]

$$U = Q^T \cdot \text{diag} [a_i] \cdot F, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Однако при переходе к трех- и четырехкоординатной моделям известный набор матричных операций становится неэффективным.

Введенное здесь торцевое произведение занимает промежуточную нишу между произведением Адамара [3] и прямым (кронекеровским, тензорным) произведением матриц [4]. Его название отражает тот факт, что правая матрица перед умножением на элементы левой как бы расщепляется с торца по строкам.

Следуя принципу симметрии, определение 1 можно дать в виде $A \square B = [A_i \cdot b_{ij}]$. Поскольку в обоих случаях получаются понятия с одинаковыми свойствами, оба определения могли бы быть равно полезными в приложениях. Однако предпочтительнее схема $[a_{ij} B_j]$, как более близкая к прямому произведению [4].

Легко проверяются сочетательное свойство торцевого произведения матриц и его распределительное свойство относительно сложения:

$$(A \square B) \square C = A \square (B \square C), \quad (A + B) \square C = A \square C + B \square C, \\ A \square (B + C) = A \square B + A \square C,$$

$$(A + B) \square (C + D) = A \square C + B \square C + A \square D + B \square D.$$

В этих выражениях предполагается, что число строк у первого и второго сомножителей совпадает.

Как и обычное произведение матриц, торцевое — некоммутативно ($A \square B \neq B \square A$), хотя для векторов коммутативность допустима $a \square b = b \square a$.

Во многих приложениях может быть полезно свойство, связывающее торцевое и прямое произведения квадратных матриц

$$A \otimes (B \square C) = (A \otimes B) \square C.$$

Характерно, что для произведения Адамара такая сочетательность невозможна:

$$A \circ (B \square C) \neq (A \circ B) \square C.$$

Соблюдение необходимой размерности сомножителей является определяющим фактором и для обращения результата торцевого произведения. Операция $(A \square B)^{-1}$ имеет смысл, если для $p \times g$ -матрицы A и $p \times s$ -матрицы B справедливо тождество $p = s \times g$. В противном случае возможно только обращение по Пенроузу.

Наконец, представляет интерес закон обращения порядка [3]. Если для обычного произведения матриц он формулируется в виде $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, то в случае торцевого произведения требуется введение нового понятия — транспонированного торцевого произведения (ТТП).

Определение 2. Транспонированным торцевым произведением $g \times p$ -матрицы $A = [a_{ij}]$ и $s \times p$ -блок-матрицы столбцов $B = [B_j], j = 1, \dots, p$, будем называть $gs \times p$ -матрицу $A \blacksquare B$, определяемую равенством

$$A \blacksquare B = [a_{ij} \cdot B_j].$$

Транспонирование результата торцевого произведения запишется так:

$$(A \square B)^T = A^T \blacksquare B^T.$$

Используя ТТП, можно предложить альтернативный вариант решения задачи аналитического моделирования отклика ЦАР. Вместо соотношений (2)—(4) для тех же матриц Q, F, V, S и вектора A получим

$$\tilde{U}_{(2)} = (Q^T \blacksquare F^T) \cdot A, \quad (5)$$

$$\tilde{U}_{(3)} = (Q^T \blacksquare F^T \blacksquare V^T) \cdot A, \quad (6)$$

$$\tilde{U}_{(4)} = (Q^T \blacksquare F^T \blacksquare V^T \blacksquare S^T) \cdot A. \quad (7)$$

Удобство ТТП для обработки сигналов и анализа точности многокоординатных систем состоит в возможности использования результаты, полученные

в рамках традиционного набора действий над матрицами применительно к одно- или двухкоординатным РЛС. Например, используя выкладки [1] и обозначив $P = Q^T \blacksquare F^T \blacksquare V^T \blacksquare S^T$, несложно записать информационную матрицу Фишера для характеристики предельно достижимой точности модели (7)

$$I = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} P^T \cdot P & \dots & (A^* \otimes P^T) \cdot P'_x \\ \dots & \dots & \dots \\ [P'_x]^T (A \otimes P) & \dots & [P'_x]^T \cdot (A A^* \otimes 1_{TRRD}) P_x \end{bmatrix},$$

где P — производная Нойдеккера матрицы P по вектору X , составленному из неизвестных параметров сигналов [4], 1_{TRRD} — единичная матрица размерности $T \times R \times R \times D$, \otimes — знак произведения.

Переходя к предельно сложной задаче, на основе нововведенных типов произведений матриц можно формализовать отклик многопозиционной радиолокационной системы из W конформных четырехкоординатных ЦАР, содержащих по G секций каждая.

Различия между секциями и позициями РЛС в характеристиках направленности, АЧХ фильтров и откликах стробов дальности выразим, заменив матрицы F^T , Q^T , V^T и S^T блочными структурами, в которых $G \times W$ блоков, соответствующих разным секциям и межпозиционным различиям параметров, разместим по вертикали. При этом, например, вместо матрицы характеристик Q^T в (5)–(7) получим блок-матрицу

$$Q_{GW}^T = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} \cdot \tilde{Q}_{21} \dots \tilde{Q}_{G_1} \dots \tilde{Q}_{GW} \\ \dots \\ \tilde{Q}_{nm} = \begin{bmatrix} Q_{1nm}(x_1) & Q_{2nm}(x_1) \dots Q_{Rnm}(x_1) \\ Q_{1nm}(x_2) & Q_{2nm}(x_2) \dots Q_{Rnm}(x_2) \\ \dots \\ Q_{1nm}(x_M) & Q_{2nm}(x_M) \dots Q_{Rnm}(x_M) \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

Аналогичное, согласованное с Q_{GM}^T , разбиение на блоки приобретут и блок-матрицы F_{GW}^T , V_{GW}^T , S_{GW}^T . Дальнейшие выкладки требуют введения понятий блочного торцевого произведения (БТП) и транспонированного БТП.

Определение 3. Блочным торцевым произведением $b \times p \times c$ -матрицы $A = [A_{ij}]$ и $b \times p \times c$ -матрицы $B = [B_{ij}]$ ($i = 1, \dots, b; j = 1, \dots, c$) с согласованным

разбиением на блоки размером $p \times s$ и $p \times g$ соответственно будем называть матрицу $A \square B$, определяемую равенством

$$A \square B = [A_{ij} \square B_{ij}]. \quad (8)$$

Знак БТП \square символизирует то обстоятельство, что одноименные блоки матриц берутся для выполнения торцевого умножения (\square) по принципу произведения Адамара. Введение отдельной модификации торцевого произведения вместо наложения ограничений на его свойства сохраняет возможность торцевого перемножения блок-матриц, например, с несогласованным разбиением на блоки.

Определение 4. Транспонированным блочным торцевым произведением (ТБТП) $c \times s \times b$ -матрицы $A = [A_{ij}]$ и $c \times g \times b$ -матрицы $B = [B_{ij}]$ ($j = 1, \dots, c; i = 1, \dots, b$) с согласованным разбиением на блоки размером $s \times p$ и $g \times p$ соответственно будем называть матрицу $A \blacksquare B$, определяемую равенством $A \blacksquare B = [A_{ij} \blacksquare B_{ij}]$.

Формализуем отклик многопозиционной радиолокационной системы:

$$\tilde{U}_{(4GW)} = (Q_{GW}^T \blacksquare F_{GW}^T \blacksquare V_{GW}^T \blacksquare S_{GW}^T) \cdot A. \quad (9)$$

В рассмотренном случае ТБТП позволило осуществить формирование четырехкоординатного отклика ЦАР для каждой из G секций W позиций РЛС.

Следует отметить возможность сочетания в рамках одной записи как торцевого, так и транспонированного торцевого произведений с их блочными модификациями. Такой прием позволит компактно упаковать результат умножения в многоблочную структуру, в отличие от векторного представления массивов напряжений, полученного в (5)–(9).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Слюсар В. И. Синтез алгоритмов измерения дальности M источников при дополнительном стробировании отчетов АЦП // Радиоэлектроника.— 1996.— № 5.— С. 55—62. (Изв. высш. учеб. заведений).
2. Слюсар В. И. Методика пересчета результатов сверхразрешения в оценки других параметров сигналов // Радиоэлектроника.— 1997.— № 5.— С. 74—77. (Изв. высш. учеб. заведений).
3. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / Пер. с англ.— М.: Мир.— 1989.— 655 с.
4. Колло Тьну. Матричная производная для многомерной статистики.— Тарту, Тартуский университет, 1991.— С. 24—29.

г. Киев.

Поступила в редакцию 27.12.96.