

СЛЮСАР В. И.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА ПРОНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДАЛЬНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрены варианты сверхразрешения сигналов по времени задержки на основе метода Прони.

Математическая однородность задач спектрального оценивания и определения времени задержки сигналов создает предпосылки для применения единых методов измерения сигнальных параметров в рамках процедур угловой пеленгации, частотной селекции и дальнометрии. Целью настоящей статьи является обобщение известного в спектральном оценивании метода Прони [1] на случай сверхразрешения узкополосных видео- и радиоимпульсов по времени задержки.

Среди всех возможных моделей огибающей импульсов при этом интерес будут представлять только аналитические аппроксимации, допускающие в отсутствие шумов тождественную замену суммы напряжений M сигналов полиномом степени M .

В числе таковых следует, прежде всего, указать колокольную или гауссовскую огибающую, определяемую функцией вида $\exp(-\beta^2 t^2)$. Ориентируясь на измерение дальности непосредственно по отсчетам аналого-цифрового преобразователя (АЦП), можно пренебрегать недостаточной физичностью такой модели, проявляющейся в нефинитности ее как функции времени, поскольку оценка времени задержки может быть осуществлена по положению максимума сигнала. В случае видеоимпульсов указанная модель позволяет использовать для их сверхразрешения так называемый «исходный метод Прони» (ИМП) [1], осуществляющий подгонку M экспонент под $2M$ отсчетов напряжений сигнальной смеси. Рассмотрим специфику его применения подробнее.

В качестве неизвестного времени задержки будем считать смещение d_m первого из $2M$ отсчетов обрабатываемой цифровой выборки напряжений относительно максимума огибающей m -го импульса. Условимся, что на протяжении анализируемого интервала ($2M$ отсчетов) присутствуют все M сигналов, и их энергетика существенно превышает дисперсию шумов.

Сделанные допущения позволяют при комплексном характере напряжений сигнальной смеси выразить $2M$ -компонентный вектор отсчетов U в свободном от шумов виде:

$$U = S \cdot A, \quad (1)$$

где

$$S = \begin{bmatrix} g^{d_1^2} & g^{d_2^2} & \dots & g^{d_M^2} \\ g^{(d_1 - z_1)^2} & g^{(d_2 - z_1)^2} & \dots & g^{(d_M - z_1)^2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g^{(d_1 - z_{2M-1})^2} & g^{(d_2 - z_{2M-1})^2} & \dots & g^{(d_M - z_{2M-1})^2} \end{bmatrix},$$

$$g = \exp(-\beta^2 \cdot \Delta t^2),$$

A — вектор комплексных амплитуд \dot{a}_i сигналов, Δt — период дискретизации, z_{m-1} — интервал между m -м и $m-1$ -м отсчетами в периодах дискретизации.

В отличие от экспонент в методе Прони [1], компоненты матрицы S содержат квадраты неизвестных параметров затухания, в роли которых выступают в данном случае времена задержки сигналов d_m . Поэтому матрицу S необходимо привести к каноническому для ИМП виду. С этой целью установим интервал между отсчетами измерительной выборки регулярным, т. е. $z_m = (m-1)z_1$, где z_1 — временной интервал в периодах дискретизации между первым и вторым кодами напряжений, используемыми для оценки времени задержки сигнала, m — порядковый номер отсчета АЦП в измерительной выборке, z_m — удаление m -го отсчета от первого в выборке.

Введем понятие обобщенной по времени комплексной амплитуды m -го сигнала $\tilde{a}_m = \dot{a}_m \exp(-\beta^2 \Delta t^2 d_m^2)$ и соответствующий ему вектор обобщенных амплитуд $\tilde{A} = [\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_M]^T$. Кроме того, раскроем квадраты в показателях степени элементов g матрицы S . В результате получим следующий эквивалент выражения (1):

$$U = \tilde{S} \cdot \tilde{A}, \quad (2)$$

где

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \frac{y^{2d_2 z_1}}{y^{z_1^2}} & \frac{y^{2d_1 z_1}}{y^{z_1^2}} & \dots & \frac{y^{2d_M z_1}}{y^{z_1^2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{y^{2d_1(2M-1)z_1}}{y^{(M-1)z_1^2}} & \frac{y^{2d_2(2M-1)z_1}}{y^{(M-1)z_1^2}} & \dots & \frac{y^{2d_M(2M-1)z_1}}{y^{(M-1)z_1^2}} \end{bmatrix},$$

$$y = \exp(\beta^2 \Delta t^2).$$

Для исключения нормировки элементов матрицы \tilde{S} желательно перейти к взвешенному вектору отсчетов напряжений

$$\tilde{U} = \left[\dot{U}_1 \dot{U}_2 y^{z_1^2} \dots \dot{U}_{2M} y^{(2M-1)^2 z_1^2} \right]^T.$$

При этом окончательно будем иметь:

$$\tilde{U} = S_K \cdot \tilde{A}, \quad (3)$$

где S_K — каноническая матрица вещественных экспонент ИМП вида, элементы которой отличаются от элементов S единичными значениями знаменателей.

Опираясь на эту модель измерительной выборки, остается применить процедуру Прони для подгонки M вещественных экспонент к $2M$ комплексным отсчетам данных. На первом ее этапе следует [1] определить M -компонентный вектор коэффициентов B полинома степени M , решив матричное уравнение:

$$C \cdot B = X, \quad (4)$$

где в данном случае

$$C = \begin{bmatrix} \dot{U}_M y^{(M-1)^2 z_1^2} & \dot{U}_{M-1} y^{(M-2)^2 z_1^2} & \dots & \dot{U}_1 \\ \dot{U}_{M+1} y^{M^2 z_1^2} & \dot{U}_M y^{(M-1)^2 z_1^2} & \dots & \dot{U}_2 y^{z_1^2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \dot{U}_{2M-1} y^{(2M-2)^2 z_1^2} & \dot{U}_{2M-2} y^{(2M-3)^2 z_1^2} & \dots & \dot{U}_M y^{(M-1)^2 z_1^2} \end{bmatrix},$$

$$X = - \left[\dot{U}_{M+1} y^{M^2 z_1^2} \dot{U}_{M+2} y^{(M+1)^2 z_1^2} \dots \dot{U}_{2M} y^{(2M-1)^2 z_1^2} \right]^T.$$

$$B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_M]^T.$$

Матрица отсчетов в левой части уравнения (4) является треугольной, поэтому для его решения удобно воспользоваться быстрыми вычислительными алгоритмами [2].

Оценку вектора B можно найти и по методу наименьших квадратов:

$$B = (C^* C)^{-1} \cdot C^* \cdot X, \quad (5)$$

где $*$ — знак комплексного сопряжения.

Определив таким образом компоненты вектора B , на следующем этапе необходимо вычислить корни полинома степени M :

$$\sum_{m=0}^M b_m \cdot \tilde{y}^{M-m} = 0, \quad (6)$$

при условии, что $b_0 = 1$ (здесь $\tilde{y} = y^2 dz_1$). Полученные в результате факторизации (6) оценки M неизвестных \tilde{y}_m позволяют выйти на искомые значения времени задержки сигналов:

$$d_m = \frac{1}{2 z_1 \beta^2 \Delta t^2} \ln |\tilde{y}_m|. \quad (7)$$

В качестве варианта практической реализации данного подхода синтезируем односигнальную измерительную процедуру. Из (4) для случая одиночного источника получим: $\dot{U}_1 \cdot b_1 = -\dot{U}_2 \cdot y^2 z_1^2$. Соответствующий вариант полинома

$$(6) \text{ примет вид: } b_0 \tilde{y} + b_1 = \tilde{y} - \frac{\dot{U}_2 y^2 z_1^2}{\dot{U}_1} = 0, \text{ откуда, } d_1 = \frac{1}{2 \beta^2 \Delta t^2 z_1} \ln \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|} + \frac{z_1}{2}.$$

При использовании метода наименьших квадратов оценка коэффициента b_1 усложнится, но учитывая, что

$$U_1^s U_2^c - U_1^c U_2^s = |\dot{U}_1| \cdot |\dot{U}_2| (\sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin \varphi) = 0,$$

где φ — начальная фаза сигнала, искомое значение оценки дальности против ожидания не будет столь же громоздким:

$$d_1 = \frac{1}{2 \beta^2 \Delta t^2 z_1} \ln \frac{U_1^c U_2^c + U_1^s U_2^s}{U_1^c^2 + U_1^s^2} + \frac{z_1}{2}.$$

Заметим, что к таким же формулам для d_1 несложно прийти и на основе частного напряжений пары отсчетов АЦП. В двухсигнальном случае аналогичные выкладки для (4) и (6) сводятся к следующему:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 y^2 z_1^2 & \dot{U}_1 \\ \dot{U}_3 y^4 z_1^2 & \dot{U}_2 y^2 z_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{U}_3 y^4 z_1^2 \\ \dot{U}_4 y^9 z_1^2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{y}^2 + b_1 \tilde{y} + b_2 = 0,$$

причем оценки b_1, b_2 по методу наименьших квадратов таковы:

$$b_1 = \frac{(\tilde{U}_{12} + \tilde{U}_{23})(\tilde{U}_{13} + \tilde{U}_{42}) - (\tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_2^2)(\tilde{U}_{23} + \tilde{U}_{43})}{\text{Det}},$$

$$b_2 = \frac{(\tilde{U}_{23} + \tilde{U}_{43})(\tilde{U}_{12} + \tilde{U}_{23}) - (\tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_3^2)(\tilde{U}_{13} + \tilde{U}_{42})}{\text{Det}};$$

$$\text{Det} = (\tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_3^2)(\tilde{U}_1^2 + \tilde{U}_2^2) - (\tilde{U}_{12} + \tilde{U}_{23})^2,$$

$$\tilde{U}_{nm} = \tilde{U}_n^c \tilde{U}_m^c + \tilde{U}_n^s \tilde{U}_m^s, \quad \tilde{U}_n^2 = \tilde{U}_n^c{}^2 + \tilde{U}_n^s{}^2,$$

$$\tilde{U}_2 = \dot{U}_2 y^2 z_1^2, \quad \tilde{U}_3 = \dot{U}_3 y^4 z_1^2, \quad \tilde{U}_4 = \dot{U}_4 y^9 z_1^2.$$

Рассмотренный вариант интерпретации ИМП на базе вещественных экспонент может быть применен также для сверхразрешения комплексных гауссовских радиоимпульсов. С этой целью необходимо предварительно повернуть все комплексные отсчеты АЦП по фазе на величину, компенсирующую ее набег за временной интервал между ними. Соответствующая процедура фазирования элементов квадратур взвешенного вектора отсчетов \tilde{U} запишется в виде:

$$\tilde{U}_s^c \phi = \tilde{U}_s^c \cos p_s + \tilde{U}_s^s \sin p_s; \quad \tilde{U}_s^s \phi = \tilde{U}_s^s \cos p_s - \tilde{U}_s^c \sin p_s,$$

где $p_s = \omega \Delta t z_s$, z_s — временной интервал между первым и s -м комплексными напряжениями сигналов.

При использовании подгонки данных под комплексные экспоненты необходимость в предварительном довороте фазы отсчетов радиоимпульсов отпадает. Изменению при этом подвергается сама модель задействованной выборки отсчетов (3), в которой каждый m -й элемент n -й строки матрицы S_k домножается на величину $\exp [j \omega_m \Delta t z_1 (n - 1)]$, где ω_m — известная частота заполнения m -го радиоимпульса.

В итоге факторизация соответствующего выражению (3) полинома будет проведена относительно комплексных корней

$$\tilde{y}_m = \exp [\beta^2 \Delta t^2 2 d_m z_1 + j \omega_m \Delta t z_1],$$

а неизвестные времена задержки определяются через их модули $|\tilde{y}_m|$ по формуле (7).

При рассмотренном подходе возможно совместное оценивание моментов прихода сигналов и их частот заполнения, если последние неизвестны. В роли частот могут фигурировать также пеленги источников. При этом искомые оценки сопутствующего времени задержки параметра определяются согласно [1] по отношению квадратур комплексных корней полинома \tilde{y}_m . В данном случае

$$\omega_m = \text{arctg} [\text{Im} \{ \tilde{y}_m \} / \text{Re} \{ \tilde{y}_m \}] / (\Delta t z_1).$$

Характерно, что разрешение по времени задержки и точность его измерения не зависят от наличия и качества информации о частоте или пеленге сигнала.

Поскольку априорные сведения о количестве источников сигналов обычно отсутствуют, применение метода Прони тесно связано с определением порядка модели M . Данная задача может решаться посредством традиционных для него подходов, связанных с анализом сингулярных чисел матрицы отсчетов [1] либо с искусственным завышением количества сигналов и отсевом шумовых решений на основе линейного предсказания вперед—назад [1]. Более компактная по объему вычислительной выборки альтернатива состоит в использовании модифицированной функции правдоподобия, из которой исключены неизвестные амплитуды сигналов [3, 4]. При этом в рамках метода Прони прогоняются все допустимые модели сигнальной смеси с возрастающим от 1 до M порядком, а полученные оценки времени задержки сигналов далее подставляются в аналогичную [4] модификацию функции правдоподобия:

$$F_M = -\frac{D}{D_M} = \max, \quad (8)$$

где D_M — определитель матрицы $[\dot{Q}_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, M$; D — определитель матрицы, отличающийся от $[\dot{Q}_{ij}]$ первыми строкой и столбцом с элементами $0, \dot{W}_1^*, \dots, \dot{W}_M^*$;

$$\dot{W}_n = \sum_{s=r_n}^{r_n+N-1} (U_s^c + j U_s^s) \dot{K}_{sn}^*; \quad \dot{Q}_{nm} = \dot{Q}_{nm}^* = \sum_{s=r_m}^{r_m+N-1} \dot{K}_{sm} \dot{K}_{sn}^*,$$

$$\dot{K}_{sm} = K_{sm} \{ \cos(\omega_m \Delta t (s - r_m)) + j \sin(\omega_m \Delta t (s - r_m)) \},$$

$$\dot{K}_{sm}^* = K_{sm} \{ \cos(\omega_m \Delta t (s - r_m)) - j \sin(\omega_m \Delta t (s - r_m)) \},$$

s — текущий номер временного отсчета, r_n — номер первого из временных отсчетов в пределах существования n -го сигнала, $r_n = s_{n_{\max}} - d_n$, $s_{n_{\max}}$ — положение максимума n -го сигнала, d_n — оценка времени задержки (7) n -го импульса,

$$K_{sm} = \begin{cases} \exp \left(-\beta^2 \Delta t^2 \left(s - r_m - \frac{N}{2} \right)^2 \right) & \text{при } r_m \leq s \leq r_m + N \\ 0 & \text{при } s < r_m \text{ и } s > r_m + N, \end{cases}$$

N — длительность сигнала в отсчетах АЦП (предполагается, что все сигналы имеют одинаковую протяженность во времени).

В случае видеоимпульсов вместо \dot{K}_{sm} и \dot{K}_{sm}^* следует непосредственно использовать вещественную функцию K_{sm} .

Существенно, что размерность вектора отсчетов напряжений U можно ограничить порядком M . При этом наиболее правдоподобным считается набор оценок r_m , максимизирующих критерий (8).

В заключение следует отметить, что различные модификации метода Прони не исчерпывают всех возможных подходов к решению задач сверхразрешения по дальности на основе детерминистских моделей сигналов. Наряду с такими достоинствами как высокая точность оценивания времени задержки, независимость ее от точности определения частоты или пеленга сигналов, методу Прони присущ недостаток, связанный с необходимостью обработки $2M$ комплексных отсчетов данных. Такая размерность измерительной выборки является избыточной хотя бы потому, что для разрешения M импульсов с неизвестными временами прихода и комплексными амплитудами достаточно иметь $1,5 M$ комплексных отсчетов (при четном M) или $1,5 M + 0,5$ (при M нечетном). Если же провести сепарацию неизвестных амплитуд сигналов, то для сведения дальномерной задачи к нахождению корней полинома степени M при гауссовской огибающей понадобится всего лишь $M+1$ комплексное напряжение.

В случае ограниченной частоты дискретизации и малых длительностей сигналов указанный фактор может стать определяющим при выборе других подходов, не столь критичных к протяженности обрабатываемой выборки напряжений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ.— М. : Мир, 1990.— С. 365—417.
2. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ.— М. : Мир, 1989.— С. 372—401.
3. Варюхин В. А., Покровский В. И., Сахно В. Ф. Модифицированная функция правдоподобия в задаче измерения угловых координат источников с помощью антенной решетки // ДАН СССР, 1983.— Т. 270.— № 5.— С. 1092—1094.
4. Слюсар В. И. Синтез алгоритмов измерения дальности M источников при дополнительном стробировании отсчетов АЦП // Радиоэлектроника.— 1996.— № 5.— С. 55—62. (Изв. высш. учеб. заведений).
5. Ицхоки Я. С. Импульсные устройства.— М. : Сов. радио, 1959.— С. 111.

г. Киев.

Поступила в редакцию 09.09.96.