УДК 621.39

СЛЮСАР В.И.

ОБОБЩЕННЫЕ ТОРЦЕВЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ В МОДЕЛЯХ ЦИФРОВЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК С НЕИДЕНТИЧНЫМИ КАНАЛАМИ

Предложены новые матричные операции для компактной записи отклика радиотехнических систем, использующих технологию цифрового формирования диаграмм направленности антенных решеток при неидентичных приемных каналах.

Поиск в Интернете позволил выявить ряд зарубежных диссертаций и материалов международных конференций, датированных 1996—2001 гг., в которых для обработки сигналов в цифровых антенных решетках (ЦАР) предлагается использовать матричное произведение Хатри—Рао [1]. Независимо от авторов [2] у истоков этого направления в задачах многокоординатных радиолокационных измерений был и автор [3], пришедший, подобно Хатри и Рао, к необходимости применения указанной матричной операции, названной им транспонированным торцевым произведением.

В [3] на основе принципа симметрии была введена также операция торцевого произведения, которая, в отличие от процедуры Хатри—Рао, позволяет выполнять построчное кронекеровское умножение матриц с одинаковым количеством строк, а также впервые исследованы основные ее свойства. Это нововведение опередило инициативу профессора Барселонского университета математики Фортиани, который независимо от [3, 4] повторно предложил операцию торцевого матричного умножения, назвав ее полуадамаровым произведением [5]. В общении по электронной почте г-н Фортиани высоко оценил результаты [3, 4], признав их приоритетность. Время, прошедшее с публикации [3, 4], подтвердило правильность выбранного пути, а рост количества приверженцев данного подхода среди зарубежных специалистов говорит о несостоятельности скептического отношения к этой проблематике.

В настоящей статье продолжено изложение основ теории торцевых произведений матриц применительно к решению задач радиолокации и связи на основе использования ЦАР.

Как известно, при рассмотрении многокоординатных информационно-измерительных систем с цифровым формированием характеристики направленности в случае неидентичных каналов антенных решеток существует проблема компактной матричной формализации откликов приемных каналов. Для ее решения предлагается семейство новых модификаций торцевого произведения, основанных на проникающем торцевом умножении матриц разной размерности [6], обобщенных операциях торцевых и блочных торцевых произведений [7].

Суть проникающего торцевого умножения [6] сводится к тому, что в качестве строк, по которым должна «расщепляться» многомерная правая матрица, рассматриваются строки либо столбцы чисел, расположенные в дополнительном по отношению к левой матрице измерении. **Проникающим торцевым произведением** $p \times g$-матрицы $A = [a_{ij}]$ на n-мерную матрицу B ($n \geq 3$), развернутую в блочную строку или блочный столбец с $p \times g$-блоками ($B = [B_r]$), называется матрица (размера B) вида

$$A \boxdot B = \left[A \circ B_r\right], \tag{1}$$

где произведение $A \circ B_r$ является адамаровым, и для матрицы B, представленной как блочная строка или блочный столбец, соответственно,

$$A \boxdot B = \left[A \circ B_1 \;\vdots\; A \circ B_2 \;\vdots \cdots \vdots\; A \circ B_r \;\vdots \cdots\right],$$

$$A \boxdot B = \left[A^{\mathrm{T}} \circ B_1^{\mathrm{T}} \;\vdots\; A^{\mathrm{T}} \circ B_2^{\mathrm{T}} \;\vdots\; A^{\mathrm{T}} \circ B_r^{\mathrm{T}} \;\vdots\right]^{\mathrm{T}},$$

где Т — символ транспонирования.

В случае p-вектора C и двумерной матрицы B, согласованной с ним по количеству строк, имеет место тождество [6] $C \square B = C \boxdot B$, а для согласованных по количеству столбцов p-строки C^{T} и 2-мерной матрицы B справедливо соотношение $C^{\mathrm{T}} \blacksquare B = C^{\mathrm{T}} \boxdot B$. Среди прочих свойств проникающего торцевого умножения отметим его коммутативность ($A \boxdot B = B \boxdot A$), но для удобства далее полагаем, что матрица меньшего размера расположена слева.

Спецификой проникающего торцевого произведения является «просачивание» двумерной матрицы сквозь трехмерную без изменения размера последней. Введенная в (1) операция позволяет формализовать процесс «просачивания» дискретных множеств сквозь множества большего размера, математическое моделирование чего часто требуется для анализа радиотехнических систем. К примеру, для 3-координатной доплеровской РЛС с плоской ЦАР, диаграммы направленности антенных элементов которой не поддаются факторизации, в односигнальной ситуации с помощью (1) можно записать бесшумовую аналитическую модель сигналов по выходу R частотных фильтров, учитывающую различия в АЧХ приемных каналов [7]:

$$U = \dot{a} \cdot \left(Q \boxdot F\right) = \dot{a} \cdot \left[Q \circ F_1 \vdots Q \circ F_2 \vdots \cdots \vdots Q \circ F_r \vdots \cdots\right]. \tag{2}$$

Здесь $\dot{a}$ — комплексная амплитуда сигнала,

$$Q = \begin{bmatrix} \dot{Q}_{11}(x,y) & \dot{Q}_{12}(x,y) & \cdots & \dot{Q}_{1R}(x,y) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x,y) & \dot{Q}_{R2}(x,y) & \vdots & \dot{Q}_{RR}(x,y) \end{bmatrix}$$

— матрица комплексных характеристик направленности антенных элементов плоской ЦАР,

$$F=\begin{bmatrix} F_{111}(\omega) & \cdots & F_{1R1}(\omega) & F_{112}(\omega) & \cdots & F_{1R2}(\omega) & & F_{11N}(\omega) & \cdots & F_{1RN}(\omega) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \cdots \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{R11}(\omega) & \cdots & F_{RR1}(\omega) & F_{R12}(\omega) & \cdots & F_{RR2}(\omega) & & F_{R1N}(\omega) & \cdots & F_{RRN}(\omega) \end{bmatrix}$$

— блок-матрица комплексных частотных характеристик цифровых фильтров $\dot{F}_{rmn}(\omega)$ на частоте сигнала ω для $R\times R$ приемных каналов ЦАР (каждый rm-й канал характеризуется специфичной АЧХ n-го частотного фильтра $F_{rmn}(\omega)$, причем номер n блока соответствует номерам доплеровских фильтров, а первые два номера в индексах rm элементов каждого блока тождественны номерам индексов матрицы Q и номеру приемного канала).

Таким образом, каждый n-й блок произведения $Q\boxdot F$ можно записать как

$$Q\circ F_n=\begin{bmatrix} \dot{Q}_{11}(x,y)\cdot \dot{F}_{11n}(\omega) & \dot{Q}_{12}(x,y)\cdot \dot{F}_{12n}(\omega) & \cdots & \dot{Q}_{1R}(x,y)\cdot \dot{F}_{1Rn}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x,y)\cdot \dot{F}_{R1n}(\omega) & \dot{Q}_{R2}(x,y)\cdot \dot{F}_{R2n}(\omega) & \vdots & \dot{Q}_{RR}(x,y)\cdot \dot{F}_{RRn}(\omega) \end{bmatrix}.$$

При решении дальномерно-пеленгационной задачи в импульсной РЛС с плоской ЦАР неидентичности приемных каналов могут быть учтены интегрально во всей полосе приема путем различного описания огибающей импульсов в каждом канале решетки. Соответствующая модель откликов трехкоординатной импульсной РЛС на одиночный источник может быть также записана на основе проникающего торцевого произведения в виде [7]

$$U=\dot{a}\cdot(Q\boxdot S)=\dot{a}\cdot[Q\circ S_1 \vdots Q\circ S_2 \vdots \cdots \vdots Q\circ S_t \vdots \cdots],$$

где $$Q\circ S_g=\begin{bmatrix} \dot{Q}_{11}(x,y)\cdot S_{11g}(z) & \dot{Q}_{12}(x,y)\cdot S_{12g}(z) & \cdots & \dot{Q}_{1R}(x,y)\cdot S_{1Rg}(z) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x,y)\cdot S_{R1g}(z) & \dot{Q}_{R_2}(x,y)\cdot S_{R_2g}(z) & \vdots & \dot{Q}_{RR}(x,y)\cdot S_{RRg}(z) \end{bmatrix}$$ — блоки произведений Адамара, $S_{nmg}(z)$ — отклик g-го строба дальности в nm-м приемном канале.

Следует отметить, что в зависимости от варианта обработки в качестве $S_{nmg}(z)$ может рассматриваться не только результат дополнительного стробирования отсчетов АЦП, но и сама дискретная огибающая импульсного сигнала в z-м по номеру отсчете. Это следует учитывать, поскольку далее для компактности изложения будет указываться только первая из возможных трактовок указанной функции параметра z.

Для формализации модели 4-координатной РЛС с плоской ЦАР, в которой производится совместное оценивание дальности, частоты и угловых координат целей, с учетом неидентичности каналов удобно воспользоваться обобщенным торцевым произведением (ОТП) [7]. Данный тип умножения предназначен исключительно для блочных матриц, имеющих блоки равной размерности, и может быть определен следующим образом:

Обобщенным торцевым произведением блочных матриц $A=[A_{ij}]$ и $B=[B_{ig}]$ с согласованным разбиением на блоки равной размерности и одинаковым количеством блок-строк называется матрица $A\tilde{\square}B$, в которой каждая i-я блок-строка представляет собой совокупность проникающих торцевых произведений всех блоков A_{ij} i-й блок-строки левой матрицы на соответствующую ей по номеру блок-строку $B_i=[B_{i1}\quad B_{i2}\quad\cdots\quad B_{iG}]$ правой матрицы B:

$$A\tilde{\square}B=\left[A_{ij}\boxdot\left[B_{i1}\quad B_{i2}\quad\cdots\quad B_{iG}\right]\right], \tag{3}$$

где $\boxdot$ — символ проникающего торцевого произведения.

Сопоставляя торцевое произведение с матричной операцией (3), нетрудно заметить, что ОТП по сути является его аналогом, только на более высоком уровне обобщения, при котором в роли элементов матриц, фигурировавших прежде в торцевом умножении, теперь выступают матричные блоки, а вместо обычного произведения в ОТП фактически используется произведение Адамара (см. определение проникающего торцевого умножения (1)).

Методологическая значимость нового типа матричного произведения заключает в себе большие потенциальные возможности как перспективного средства общесистемного анализа и синтеза.

Определившись с терминологией и особенностями используемого матричного аппарата, рассмотрим искомую математическую модель четырехкоординатной РЛС с ЦАР. В случае одиночного сигнала, источник которого подпадает под определение точечного, массив выходных, для удобства незашумленных, напряжений приемных каналов цифровой диаграммообразующей схемы после дополнительного стробирования отсчетов АЦП по дальности и формирования частотных фильтров может быть записан в виде [7]:

$$U=\left(Q\boxdot\left\{S\tilde{\square}F\right\}\right)\cdot\dot{a}=Q\boxdot\left[S_1\boxdot F\,\vdots\,S_2\boxdot F\,\vdots\cdots\vdots\,S_T\boxdot F\right]\cdot\dot{a}, \tag{4}$$

где $Q=\begin{bmatrix}\dot{Q}_{11}(x,y) & \dot{Q}_{12}(x,y) & \cdots & \dot{Q}_{1R}(x,y)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dot{Q}_{R1}(x,y) & \dot{Q}_{R2}(x,y) & \cdots & \dot{Q}_{RR}(x,y)\end{bmatrix}$ — матрица комплексных характеристик направленности антенных элементов плоской ЦАР,

$$S=\left[S_1\ S_2 \cdots S_G\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc:ccc:c:ccc} S_{111}(z) & \cdots & S_{1R1}(z) & S_{112}(z) & \cdots & S_{1R2}(z) & & S_{11G}(z) & \cdots & S_{1RG}(z) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{R11}(z) & \cdots & S_{RR1}(z) & S_{R12}(z) & \cdots & S_{RR2}(z) & & S_{R1G}(z) & \cdots & S_{RRG}(z) \end{array}\right]$$

— блок-матрица откликов G стробов дальности $R\times R$ приемных каналов, различия в АЧХ которых приводят к неидентичностям огибающих импульсных сигналов (у каждого rm-го канала в g-м стробе дальности будет своя, уникальная, огибающая импульсного сигнала $S_{rmg}(z)$), F — блок-матрица характеристик N частотных фильтров, аналогичная рассмотренной в (6).

В более сложном многопозиционном случае, когда все позиции представляют собой 4-координатные РЛС с ЦАР (4), общую аналитическую модель мультистатической системы при решении дальномерно-пеленгационной задачи по одиночному источнику можно формализовать с помощью ОТП (3):

$$\tilde{U}=\left(\tilde{Q}\,\tilde{\square}\left\{\tilde{S}\,\tilde{\square}\,\tilde{F}\right\}\right)\cdot\dot{a}. \qquad (5)$$

Здесь блочные матрицы $\tilde{U}, \tilde{Q}, \tilde{S}, \tilde{F}$ имеют тот же смысл, что и в (4), но отличаются от последнего наличием дополнительного индекса в элементах блочных матриц, который соответствует номеру позиции многопозиционной системы:

$$\tilde{Q}=\begin{bmatrix}\tilde{Q}_1\\ \tilde{Q}_2\\ \vdots\\ \tilde{Q}_P\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{Q}_{111}(x,y) & \dot{Q}_{121}(x,y) & \cdots & \dot{Q}_{1R1}(x,y)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \dot{Q}_{R11}(x,y) & \dot{Q}_{R21}(x,y) & \cdots & \dot{Q}_{RR1}(x,y)\\ \hdashline & \vdots & \vdots & \\ \hdashline \dot{Q}_{11P}(x,y) & \dot{Q}_{12P}(x,y) & \cdots & \dot{Q}_{1RP}(x,y)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \dot{Q}_{R1P}(x,y) & \dot{Q}_{R2P}(x,y) & \cdots & \dot{Q}_{RRP}(x,y)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{S}=\begin{bmatrix}\tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & \cdots & \tilde{S}_{1G}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \tilde{S}_{P1} & \tilde{S}_{P2} & \cdots & \tilde{S}_{PG}\end{bmatrix}=$$

$$
=\begin{bmatrix}
S_{1111}(z) & \cdots & S_{1R11}(z) & S_{1112}(z) & \cdots & S_{1R12}(z) & & S_{111G}(z) & \cdots & S_{1R1G}(z) \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
S_{R111}(z) & \cdots & S_{RR11}(z) & S_{R112}(z) & \cdots & S_{RR12}(z) & & S_{R11G}(z) & \cdots & S_{RR1G}(z) \\
 & & & & & \cdots & & & & \\
S_{11P1}(z) & \cdots & S_{1RP1}(z) & S_{11P2}(z) & \cdots & S_{1RP2}(z) & & S_{11PG}(z) & \cdots & S_{1RPG}(z) \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
S_{R1P1}(z) & \cdots & S_{RRP1}(z) & S_{R1P2}(z) & \cdots & S_{RRP2}(z) & & S_{R1PG}(z) & \cdots & S_{RRPG}(z)
\end{bmatrix},
$$

а матрица F совпадает с матрицей S при замене в ней символов S и z соответственно символами F и ω.

Используя блочные обозначения, в развернутом виде соотношения (5) можно детализировать с учетом определения (3):

$$
U=\left(\begin{bmatrix}\widetilde{Q}_1\\ \vdots \\ \widetilde{Q}_P\end{bmatrix} \,\tilde{\square}\, \begin{bmatrix}\widetilde{S}_{11} & \widetilde{S}_{12} & \cdots & \widetilde{S}_{1G}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \widetilde{S}_{P1} & \widetilde{S}_{P2} & \cdots & \widetilde{S}_{PG}\end{bmatrix} \,\tilde{\square}\, \begin{bmatrix}\widetilde{F}_{11} & \widetilde{F}_{12} & \cdots & \widetilde{F}_{1N}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \widetilde{F}_{P1} & \widetilde{F}_{P2} & \cdots & \widetilde{F}_{PN}\end{bmatrix}\right)\cdot \dot{a}=
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\widetilde{Q}_1 \boxtimes \left[\widetilde{S}_{11} \boxtimes [F_{11} \ \cdots \ F_{1N}]\right] & \widetilde{Q}_1 \boxtimes \left[\widetilde{S}_{12} \boxtimes [F_{11} \ \cdots \ F_{1N}]\right] & \cdots & \widetilde{Q}_1 \boxtimes \left[\widetilde{S}_{1G} \boxtimes [F_{11} \ \cdots \ F_{1N}]\right] \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\widetilde{Q}_P \boxtimes \left[\widetilde{S}_{P1} \boxtimes [F_{P1} \ \cdots \ F_{PN}]\right] & \widetilde{Q}_P \boxtimes \left[\widetilde{S}_{P2} \boxtimes [F_{P1} \ \cdots \ F_{PN}]\right] & \cdots & \widetilde{Q}_P \boxtimes \left[\widetilde{S}_{PG} \boxtimes [F_{P1} \ \cdots \ F_{PN}]\right]
\end{bmatrix}\dot{a},
$$

где каждый pgn-й блок результирующей матрицы U определяется произведением Адамара соответствующих блоков матриц $\widetilde{Q}$, $\widetilde{S}$, $\widetilde{F}$:

$$
\widetilde{U}_{pgn}=\left(\widetilde{Q}_p \circ \widetilde{S}_{pg} \circ \widetilde{F}_{pn}\right)\cdot \dot{a}=
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\dot{a}\cdot \widetilde{Q}_{11p}(x,y)\cdot S_{11pg}(z)\cdot F_{11pn}(\omega) & \dots & \dot{a}\cdot \widetilde{Q}_{1Rp}(x,y)\cdot S_{1Rpg}(z)\cdot F_{1Rpn}(\omega) \\
\dots & \dots & \dots \\
\dot{a}\cdot \widetilde{Q}_{R1p}(x,y)\cdot S_{R1pg}(z)\cdot F_{R1pn}(\omega) & \cdots & \dot{a}\cdot \widetilde{Q}_{RRp}(x,y)\cdot S_{RRpg}(z)\cdot F_{RRpn}(\omega)
\end{bmatrix}.
$$

При необходимости совместного оценивания угловых координат и дальностей М источников, в случае неидентичных характеристик приемных каналов ЦАР, решение измерительной задачи нуждается во введении понятия **блочного обобщенного торцевого произведения (БОТП)** матриц [7]. Операция сводится к выполнению по-блочной процедуры обобщенного торцевого произведения, между блоками одного иерархического уровня.

Блочным обобщенным торцевым произведением $dbp\times ngs$-матрицы $A=\left[A_{bg}\right]_{dn}$ и $dbp\times nks$-матрицы $B=\left[B_{bk}\right]_{dn}$, состоящих из одинакового количества ($d\times n$) суперблоков, размерностью $b\times g$ и $b\times k$ соответственно, образованных b блок-строками каждый, в составе g (матрица A) и k (матрица B) $p\times s$-блоков, называется $dbp\times ngks$ матрица $A\tilde{\circledcirc}B$, каждый dn-й суперблок которой представляет собой обобщенное торцевое произведение соответствующих суперблоков исходных матриц

$$A\tilde{\circledcirc}B=\left[A_{bg}\,\tilde{\square}\,B_{bk}\right]_{dn}.$$

Учитывая это определение, рассмотрим вначале однопозиционную радиолокационную систему, решающую дальномерно-пеленгационную задачу по M источникам сигналов. Напряжения ее выходной импульсной смеси без учета шумов можно представить операцией блочного ОТП в виде:

$$U=(Q\tilde{\circledcirc}S)(A\otimes 1_R\otimes 1_G), \tag{6}$$

где $Q=\begin{bmatrix} \dot{Q}_{11}(x_1,y_1) & \cdots & \dot{Q}_{1R}(x_1,y_1) & & \dot{Q}_{11}(x_M,y_M) & \cdots & \dot{Q}_{1R}(x_M,y_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1}(x_1,y_1) & \cdots & \dot{Q}_{RR}(x_1,y_1) & & \dot{Q}_{R1}(x_M,y_M) & \cdots & \dot{Q}_{RR}(x_M,y_M) \end{bmatrix}$,

$$S=\left[S_1\;S_2\cdots S_M\right],$$

причем

$$S_m=\begin{bmatrix} S_{111}(z_m) & \cdots & S_{1R1}(z_m) & & S_{11G}(z_m) & \cdots & S_{1RG}(z_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{R11}(z_m) & \cdots & S_{RR1}(z_m) & & S_{R1G}(z_m) & \cdots & S_{RRG}(z_m) \end{bmatrix},$$

$A=\left[\dot{a}_1\;\dot{a}_2\ldots\dot{a}_m\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор комплексных амплитуд M сигналов, 1_R, 1_G — единичные матрицы размерности $R\times R$ и $G\times G$ соответственно, блок-матрица U с элементами $\dot{U}_{krt}=\sum_{m=1}^{M}\dot{a}_m\cdot S_{nrg}(z_m)\cdot \dot{Q}_{kr}(x_m,y_m)$ имеет вид:

$$U=\begin{bmatrix} \dot{U}_{111} & \cdots & \dot{U}_{1R1} & & \dot{U}_{11G} & \cdots & \dot{U}_{1RG} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{U}_{R11} & \cdots & \dot{U}_{RR1} & & \dot{U}_{R1G} & \cdots & \dot{U}_{RRG} \end{bmatrix}.$$

При проведении 4-координатных измерений модель (6), дополненная частотной селекцией, преобразуется в следующую матричную запись:

$$U=(Q\tilde{\circledcirc}S\tilde{\circledcirc}F)(A\otimes 1_R\otimes 1_G\otimes 1_N), \tag{7}$$

где в отличие от (6) блок-матрица U дополняется новыми блоками, индексированными по номерам частотных фильтров:

$$U=\begin{bmatrix} \dot{U}_{1111} & \cdots & \dot{U}_{1R11} & & \dot{U}_{11G1} & \cdots & \dot{U}_{1RG1} & & \dot{U}_{11GN} & \cdots & \dot{U}_{1RGN} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{U}_{R111} & \cdots & \dot{U}_{RR11} & & \dot{U}_{R1G1} & \cdots & \dot{U}_{RRG1} & & \dot{U}_{R1GN} & \cdots & \dot{U}_{RRGN} \end{bmatrix},$$

причем $\dot{U}_{krgn}=\sum_{m=1}^{M}\dot{a}_m\cdot S_{krg}(z_m)\cdot Q_{kr}(x_m,y_m)\cdot F_{krn}(\omega_m)$,

$$F=[F_1\,F_2\cdots F_M],$$

$$F_m=\begin{bmatrix} F_{111}(\omega_m) & \cdots & F_{1R1}(\omega_m) & & F_{11N}(\omega_m) & \cdots & F_{1RN}(\omega_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{R11}(\omega_m) & \cdots & F_{RR1}(\omega_m) & & F_{R1N}(\omega_m) & \cdots & F_{RRN}(\omega_m) \end{bmatrix};$$

1_G — единичная матрица размера $G\times G$.

Для многопозиционного случая (6), (7) можно обобщить как:

$$U=(\tilde{Q}\circledcirc\tilde{S})(A\otimes 1_R\otimes 1_G),\; U=(\tilde{Q}\circledcirc\tilde{S}\circledcirc\tilde{F})(A\otimes 1_R\otimes 1_G\otimes 1_N), \qquad (8)$$

где

$$\tilde{Q}=\begin{bmatrix} \dot{Q}_{111}(x_1,y_1) & \cdots & \dot{Q}_{1R1}(x_1,y_1) & & \dot{Q}_{111}(x_M,y_M) & \cdots & \dot{Q}_{1R1}(x_M,y_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R11}(x_1,y_1) & \cdots & \dot{Q}_{RR1}(x_1,y_1) & & \dot{Q}_{R11}(x_M,y_M) & \cdots & \dot{Q}_{RR1}(x_M,y_M) \\ & \vdots & & \cdots & & \vdots & \\ \dot{Q}_{11P}(x_1,y_1) & \cdots & \dot{Q}_{1RP}(x_1,y_1) & & \dot{Q}_{11P}(x_M,y_M) & \cdots & \dot{Q}_{1RP}(x_M,y_M) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Q}_{R1P}(x_1,y_1) & \cdots & \dot{Q}_{RRP}(x_1,y_1) & & \dot{Q}_{R1P}(x_M,y_M) & \cdots & \dot{Q}_{RRP}(x_M,y_M) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{S}=\begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} & \cdots & \tilde{S}_{1M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{S}_{P1} & \tilde{S}_{P2} & \cdots & \tilde{S}_{PM} \end{bmatrix},\quad \tilde{F}=\begin{bmatrix} \tilde{F}_{11} & \tilde{F}_{12} & \cdots & \tilde{F}_{1M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \tilde{F}_{P1} & \tilde{F}_{P2} & \cdots & \tilde{F}_{PM} \end{bmatrix},$$

причем

$$\tilde{S}_{pm}=\begin{bmatrix} S_{11p1}(z_m) & \cdots & S_{1Rp1}(z_m) & & S_{11pG}(z_m) & \cdots & S_{1RpG}(z_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{R1p1}(z_m) & \cdots & S_{RRp1}(z_m) & & S_{R1pG}(z_m) & \cdots & S_{RRpG}(z_m) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F}_{pm}=\begin{bmatrix} F_{11p1}(\omega_m) & \cdots & F_{1Rp1}(\omega_m) & & F_{11pN}(\omega_m) & \cdots & F_{1RpN}(\omega_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ F_{R1p1}(\omega_m) & \cdots & F_{RRp1}(\omega_m) & & F_{R1pN}(\omega_m) & \cdots & F_{RRpN}(\omega_m) \end{bmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что особенностью приведенных многосигнальных моделей является представление амплитудного сомножителя в виде кронекеровского произведения вектора амплитуд на единичные матрицы. Для уменьшения количества последних имеет смысл воспользоваться формализацией многосигнальных моделей РЛС на основе операций транспонированных ОТП и БОТП [12]. По аналогии с ранее рассмотренными понятиями, дадим указанным операциям следующие определения.

Транспонированным обобщенным торцевым произведением (ТОТП) блочных матриц $A = \left[A_{ij} \right]$ и $B = \left[B_{gj} \right]$ с согласованным разбиением на блоки равной размерности и одинаковым количеством блок-столбцов называется матрица $A \tilde{\blacksquare} B$, в которой каждый j-й блок-столбец представляет собой совокупность проникающих торцевых произведений всех блоков A_{ij} j-го блок-столбца левой матрицы на соответствующий ему по номеру блок-столбец $B_j = [B_{1j}^{\mathrm{T}} \ldots B_{Gj}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ правой матрицы B:

$$A \tilde{\blacksquare} B = \left[A_{ij} \boxdot \begin{bmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{Gj} \end{bmatrix} \right], \tag{9}$$

где $\boxdot$ — символ проникающего торцевого произведения.

Транспонированным блочным обобщенным торцевым произведением (ТБОТП) $dbp \times ngs$-матрицы $A = \left[A_{bg} \right]_{dn}$ и $dkp \times ngs$-матрицы $B = \left[B_{kg} \right]_{dn}$, состоящих из одинакового количества $(d \times n)$ суперблоков, размерностью $b \times g$ и $k \times g$ соответственно, образованных g блок-столбцами каждый, в составе b (матрица A) и k (матрица B) $p \times s$-блоков, называется $dbkp \times ngs$ матрица $A \tilde{\circledbullet} B$, каждый dn-й суперблок которой представляет собой транспонированное обобщенное торцевое произведение соответствующих суперблоков исходных матриц, т. е. $A \tilde{\circledbullet} B = \left[A_{bg} \tilde{\blacksquare} B_{kg} \right]_{dn}$.

Для сохранения преемственности в системе матричных обозначений, использованной выше при описании пеленгационных характеристик ЦАР, АЧХ доплеровских фильтров и откликов стробирующих по дальности процедур, дополним изложенное описанием операции блочной ротации матриц [7].

Блочной ротацией блок-матрицы A, каждый из блоков A_{ij} которой является блок-строкой или блок-столбцом, называется операция, сводящаяся к нетранспонированному развороту указанных блок-строк (блок-столбцов) искомой матрицы относительно их первых блоков в направлении часовой стрелки (против часовой стрелки соответственно), в результате которого блок-строки превращаются в блок-столбцы или наоборот. При этом внутри блоков, образующих блок-строки (блок-столбцы), никаких изменений не происходит, неизменной остается и структура матрицы A на уровне блоков A_{ij}. Для обозначения этой операции по аналогии с транспонированием будем использовать в качестве верхнего индекса при блочных матрицах символ R от слова *rotation*.

В пакете MatLab 5.0 и боле поздних версий имеется встроенный вариант процедуры ротации rot(A), существенно отличающийся от предложенной. К сожалению, эта концепция при блочной структуре матриц дает результат, непригодный к использованию для решаемой здесь проблемы.

Руководствуясь совокупностью нововведенных понятий, получим альтернативные по отношению к (6)—(8) модели многосигнальных радиолокационных измерителей совместного оценивания дальности, углов и частоты нескольких точечных источников сигналов:

$$U=(Q\tilde{\circledbullet}S^R)(A\otimes 1_R),\ U=\left(Q\tilde{\circledbullet}(S^R\tilde{\circledbullet}F^R)\right)(A\otimes 1_R),$$
$$U=(\tilde{Q}\tilde{\circledbullet}\tilde{S}^R)(A\otimes 1_R),\ U=\left(\tilde{Q}\tilde{\circledbullet}(\tilde{S}^R\tilde{\circledbullet}\tilde{F}^R)\right)(A\otimes 1_R). \qquad (10)$$

Здесь матрицы $Q,\tilde{Q},1_R$ и вектор A сохранили свой прежний смысл, $S^R,\tilde{S}^R,F^R,\tilde{F}^R$ — подвергнутые ротации блок-матрицы $S,\tilde{S},F,\tilde{F}$, трактуемые подобно соотношениям (6)—(8), причем

$$S^R=\left[S_1^R\ S_2^R\cdots S_M^R\right],\ F^R=\left[F_1^R\ F_2^R\cdots F_M^R\right],$$

$$S_m^R=\begin{bmatrix} S_{111}(z_m) & \cdots & S_{1R1}(z_m)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ S_{R11}(z_m) & \cdots & S_{RR1}(z_m)\\ & \vdots & \\ S_{11G}(z_m) & \cdots & S_{1RG}(z_m)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ S_{R1G}(z_m) & \cdots & S_{RRG}(z_m)\end{bmatrix},\ F_m^R=\begin{bmatrix} F_{111}(\omega_m) & \cdots @ & F_{1R1}(\omega_m)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ F_{R11}(\omega_m) & \cdots & F_{RR1}(\omega_m)\\ & \vdots & \\ F_{11N}(\omega_m) & \cdots & F_{1RN}(\omega_m)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ F_{R1N}(\omega_m) & \cdots & F_{RRN}(\omega_m)\end{bmatrix};$$

$$\tilde{S}^R=\begin{bmatrix}\tilde{S}_{11}^R & \tilde{S}_{12}^R & \cdots & \tilde{S}_{1M}^R\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \tilde{S}_{P1}^R & \tilde{S}_{P2}^R & \cdots & \tilde{S}_{PM}^R\end{bmatrix},\ \tilde{F}^R=\begin{bmatrix}\tilde{F}_{11}^R & \tilde{F}_{12}^R & \cdots & \tilde{F}_{1M}^R\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \tilde{F}_{P1}^R & \tilde{F}_{P2}^R & \cdots & \tilde{F}_{PM}^R\end{bmatrix},$$

$$\tilde{S}_{pm}^R=\begin{bmatrix} S_{11p1}(z_m) & \cdots & S_{1Rp1}(z_m)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ S_{R1p1}(z_m) & \cdots & S_{RRp1}(z_m)\\ & \vdots & \\ S_{11pG}(z_m) & \cdots & S_{1RpG}(z_m)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ S_{R1pG}(z_m) & \cdots & S_{RRpG}(z_m)\end{bmatrix},\ \tilde{F}_{pm}^R=\begin{bmatrix} F_{11p1}(\omega_m) & \cdots & F_{1Rp1}(\omega_m)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ F_{R1p1}(\omega_m) & \cdots & F_{RRp1}(\omega_m)\\ & \vdots & \\ F_{11pN}(\omega_m) & \cdots & F_{1RpN}(\omega_m)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ F_{R1pN}(\omega_m) & \cdots & F_{RRpN}(\omega_m)\end{bmatrix}.$$

Примечательно, что во всех соотношениях (10) присутствует одинаковый амплитудный множитель $A \otimes 1_R$. Дальнейшее сокращение его размерности, сводящееся к записи его исключительно через вектор амплитуд, основано на использовании **блочной векторизации**, которая в отличие от известного vec-оператора действует не в масштабе всей матрицы, а по блокам.

Операцией блочной векторизации блочной $dp{\times}sc$-матрицы A называется ее поблочное преобразование с помощью vec-оператора, т. е.

$$b\mathrm{vec}_{pc} A = b\mathrm{vec}_{pc}[A_{ds}] = \left[\mathrm{vec}[a_{pc}]\right]_{ds}. \qquad (11)$$

Двойной индекс pc у оператора $b\mathrm{vec}_{pc}$ определяет размеры блоков, подвергаемых действию vec-оператора, причем их формирование осуществляется, начиная с левого верхнего угла преобразуемой матрицы, учитывая, что индекс p обозначает количество строк, а c — число столбцов в блоке.

Применяя процедуру (11), можно получить из (10) следующие аналитические записи напряжений импульсных сигналов в 3-х и 4-х координатной РЛС с ЦАР:

$$U = \left[b\mathrm{vec}_{pc}\left(Q \tilde{\circledbullet} S^R\right)\right]A, U = \left[b\mathrm{vec}_{pc}\left(Q \tilde{\circledbullet}\left(S^R \tilde{\circledbullet} F^R\right)\right)\right]A,$$

$$U = \left[b\mathrm{vec}_{pc}\left(\tilde{Q} \tilde{\circledbullet} \tilde{S}^R\right)\right]A, U = \left[b\mathrm{vec}_{pc}\left(\tilde{Q} \tilde{\circledbullet}\left(\tilde{S}^R \tilde{\circledbullet} \tilde{F}^R\right)\right)\right]A.$$

Последующее использование полученных моделей откликов РЛС с ЦАР не отличается от рассмотренных в [4] вариантов решения измерительных задач, а также процедур анализа потенциальной точности и оценки предельной разрешающей способности многокоординатных измерений применительно к идентичным каналам антенной решетки. Конкретный механизм применения указанных моделей может существенно разниться в зависимости от решаемой задачи. Имея столь мощный матричный аппарат, исследователям далее достаточно лишь определиться в своих предпочтениях, остановив выбор на наиболее удобном для них варианте формализации матричной модели отклика ЦАР из числа здесь рассмотренных. При этом открываются возможности проведения по единой схеме последующего анализа потенциальных свойств той или иной радиотехнической системы либо синтеза соответствующих ее конкретной структуре методов измерения координат, в том числе в режиме совместного оценивания таковых для многосигнальной ситуации. Продвижение в указанных областях во многом сдерживалось в связи с несовершенством традиционной матричной алгебры. В теории радиолокации, связи и системном анализе имеются и другие проблемы, решению которых может способствовать предложенный подход.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Khatri C. G., Rao C. R.* Solutions to some functional equations and their applications to characterizations of probability distributions // Sankhya, Se. A.— 1968. — Vol. 30.— P. 167—180.

2. *Vanderveen M. C., Ng B. C., Papadias C. B., Paulraj A.* Joint Angle and Delay Estimation (JADE) for Signals in Multipath Environments // Proc. 30th Asilomar Conf. Circuits, Syst. Comp.— Nov. 1996.

3. *Slyusar V. I.* Analytical model of the digital antenna array on a basis of face-splitting matrixs product // Proc. ICATT-97.— Kyiv.— May 1997.— P. 108—109.

4. *Слюсар В. И.* Торцевые произведения матриц в радиолокационных приложениях// Радиоэлектроника.— 1998.— № 3.— С. 71—75. (Изв. вузов).

5. *Fortiana J., Esteve A.* Interaction Terms in the Distance-Based Regression Model // Abstracts of the 11th European Meeting of the Psychometric Society.— Juli 1998.

6. *Слюсар В. И.* Семейство торцевых произведений матриц и его свойства // Кибернетика и системный анализ.— 1999.— № 3.— С. 43—49.

7. Slyusar V. I. The matrix models of digital antenna arrays with nonidentical channels // Proc. ICATT-99.— Sevastopil.— Sept. 8—11, 1999.— P. 241—243.

ЦНИИ вооружения и военной техники ВСУ. Поступила в редакцию 14.01.02.

УДК 681.32

СТАШУК А. В., СТАШУК Л. Д., СТАШУК В. Д.

СПОСОБ СНИЖЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

Предложен способ аналого-цифрового преобразования, позволяющий существенно снизить энергетические затраты на передачу сигналов в цифровых телекоммуникационных системах путем формирования принципиально иной структуры цифрового сигнала по сравнению с импульсно-модулированными кодовыми комбинациями.

В современных цифровых системах в качестве цифрового кода широкое распространение получила бинарная импульсно-кодовая модуляция (ИКМ) и структуры (форматы) сигналов, состоящие из последовательности кодовых комбинаций, объединяемых в циклы и сверхциклы (например, система ИКМ-24Т1 (США), система ИКМ-36 (Франция), система ИКМ-30\32 (СНГ) и др.). Такие структуры сигналов содержат m-разрядные кодовые комбинации, где количество энергетически наполненных единиц равно $m/2$ (при условии равной вероятности появления нуля и единицы на каждой разрядной позиции). В фундаментальном теоретическом труде [1, с. 264—268] показано, что наиболее рациональной является передача цифровой информации одиночными импульсами. Однако, в этой монографии и в других известных авторам работах отсутствуют какие-либо указания на способ осуществления такой возможности.