

изучение марковского процесса на нескольких примерах иллюстрирует практические аспекты предложенного алгоритма.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Balakrishnan A., On the problem of time jitter in sampling, IRE Trans. on Information Theory. Vol. IT-8, pp. 226–236, April 1962.
2. Souders T.M., Flach D.R., Hagwood C., Yang G.L. The effect of timing jitter in sampling Systems. //IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, Vol. 39, No 1, pp. 80–85, February 1990.
3. Kazakov V., Rodriguez D. Sampling–Reconstruction Procedure of Gaussian processes with a Finite Number of Samples with Jitter, Proceedings of the Fourth International Symposium «Communication Systems, Networks and Digital Signal Processing»– CSNDSP-04. Newcastle, UK, pp.557 —560. 20–22 July 2004.
4. Горелов Г.В. Нерегулярная дискретизация сигналов. — М., Радио и Связь, 1982,— 254 с.
5. Beutler F.J., Leneman O.A.Z, Random Sampling of Random Processes: Stationary Point Processes. // Information and Control, Vol. 9, pp. 325–346, 1966.
6. Leneman O.A.Z., Random Sampling of Random Processes: Impulse Processes. // Information and Control, vol. 9, pp. 347–363, 1966.
7. Leneman O.A.Z., J.B.Lewis. Random Sampling of Random Processes: Mean –square comparison of various interpolators // IEEE Trans. on Automatic Control, vol. 11, pp. 396 — 403, July 1966.
8. Leneman O.A.Z., Random sampling of random process: optimal linear interpolation.// Journal Franclin Institute, Vol. 281, No 4, pp. 302–314, April 1966.
9. Masry E., Poisson sampling and spectral estimation of continuous –time processes // IEEE Trans. on Information Theory, Vol. IT-24, No 2, pp. 173 —183. March, 1978.
10. Артамонов Г.Т., Турин В.Д. Анализ информационно — управляющих систем со случайным интервалом квантования сигнала по времени. — М., Энергия, 1977, 112 с.
11. Baranov L.A. Error estimates of the restoration of a continuous random signal when the sampling is irregular. // Telecommunication and Radioengineering. — 1983 — Vol. 37–38, No 8, pp.37–39.
12. Kazakov V. A. «The sampling–reconstruction Procedure with a Limited Number of Samples of Stochastic Processes and Fields on the Basis of the Conditional Mean Rule», // Electromagnetic Waves and Electronic Systems. — 2005. — Vol. 10, # 1–2, pp. 98–116.
13. V. Kazakov, D. Rodriguez. Reconstruction of Gaussian processes with an arbitrary number of samples and discrete jitter. // IETE Journal of Research, Vol. 51, No 5, pp. 361–370. September– October, 2005.

Нац. Мексиканский политехн. ин-т, Мехико

Поступила в редакцию 14.05.07

УДК 621.39

СЛЮСАР В. И., ВАСИЛЬЕВ К. А.

### ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ ЧАСТОТНОГО УПЛОТНЕНИЯ СИГНАЛОВ N–OFDM НА ОСНОВЕ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ХАРТЛИ

Исследованы предельные возможности частотного уплотнения сигналов, сформированных по методу N–OFDM на основе преобразования Хартли. Путем имитационного моделирования проверена достоверность соответствующей нижней границы Крамера–Рао для оценок амплитуд сигналов.

Для повышения пропускной способности линий связи используется метод неортогональной частотной дискретной модуляции (N–OFDM), основанный на уплотнении частотных каналов за счет передачи несущих на неортогональных частотах [1, 2]. Реализация данного метода с использованием классического преобразования Фурье сталкивается с рядом трудностей, среди которых следует отметить вычислительную сложность с учетом комплексного представления чисел. Использование преобразования Хартли (ПХ) позволяет отказаться от комплексной записи данных и упростить аппаратную реализацию метода N–OFDM [3].

Целью статьи является определение потенциальных границ частотного уплотнения сигналов, сформированных по методу N–OFDM на основе преобразования Хартли, с вероятностью правильной демодуляции сообщений, равной 0,9973.

Для определения потенциальных границ частотного уплотнения сигналов N–OFDM был выполнен вычислительный эксперимент, основанный на использовании имитационной программы, разработанной в среде Delphi 7. Суть эксперимента заключается в следующем. Сообщение фиксированной длины преобразовывалось в последовательность десятичных символов  $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_M]^T$ , используемых в качестве амплитуд сигналов различных несущих. Далее моделировалась выборка  $W$  из  $T$  временных отсчетов напряжений сигнальной смеси, подлежащая передаче на  $M$  частотах [3]:

$$W = P \cdot A = \begin{bmatrix} \text{cas } \omega_1(s_1 - z_1)\Delta t & \text{cas } \omega_2(s_1 - z_2)\Delta t & \dots & \text{cas } \omega_M(s_1 - z_M)\Delta t \\ \text{cas } \omega_1(s_2 - z_1)\Delta t & \text{cas } \omega_2(s_2 - z_2)\Delta t & \dots & \text{cas } \omega_M(s_2 - z_M)\Delta t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cas } \omega_1(s_T - z_1)\Delta t & \text{cas } \omega_2(s_T - z_2)\Delta t & \vdots & \text{cas } \omega_M(s_T - z_M)\Delta t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} \quad (1)$$

где  $\text{cas } \omega_M S_{TM} = \cos \omega_M S_{TM} + \sin \omega_M S_{TM}$  — функция Хартли [3];  $\omega_m = 2\pi f_m$ ;  $f_m$  — частота  $m$ -й несущей на выходе цифро-аналогового преобразователя (ЦАП);  $s_t$  — порядковый номер  $t$ -го временного отсчета сигнальной выборки;

$z_m$  — смещение начала формируемой выборки относительно точки нулевой фазы  $m$ -й несущей ( $\varphi_m = 2\pi f_m z_m \Delta t$  — начальная фаза  $m$ -й несущей);  $\Delta t$  — период такта ЦАП.

Для обеспечения возможности передачи сигналов N-OFDM с помощью ЦАП различной разрядности введено следующее ограничение:

$$|W_{\max}| \leq 2^{R-1} - 1, \quad (2)$$

где  $R$  — количество разрядов ЦАП.

На выходе приемного устройства прошедшая среду распространения многочастотная сигнальная смесь может быть представлена аналогичной матричной записью, отличающейся от (1) учетом воздействия аддитивного шума:

$$U = P \cdot A + N, \quad (3)$$

где  $N = [n_1 \ n_2 \ \dots \ n_T]^T$  — вектор отсчетов напряжений шума.

При проведении вычислительного эксперимента был использован вектор отсчетов напряжений шума с нормальным распределением. Расчеты проводились для 100 реализаций процесса передачи фиксированного текстового сообщения.

Для оптимальной демодуляции полученной информации использовано оценивание амплитуд сигналов по методу наименьших квадратов [2]:

$$\hat{A} = \{P^T P\}^{-1} P^T U. \quad (4)$$

Для удобства оценки допустимой величины частотного уплотнения сигналов N-OFDM по отношению к сигналам с ортогональными несущими целесообразно частотный сдвиг соседних каналов выразить относительной величиной:

$$\xi = \frac{\Delta f}{\Delta F}, \quad (5)$$

где  $\Delta f$  — разнос частот неортогональных несущих,  $\Delta F$  — разнос частот ортогональных несущих.

Согласно [4] потенциальная точность демодуляции сигналов N-OFDM с использованием ПХ характеризуется нижней границей Крамера-Рао (НГКР) для дисперсии оценок амплитуд сигналов. Для вычисления НГКР проводится расчет информационной матрицы Фишера, которая в данном случае запишется в виде [2]:

$$I = \frac{1}{\sigma_{\text{ш}}^2} \cdot P^T P, \quad (6)$$

где  $\sigma_{\text{ш}}^2$  — среднеквадратичное отклонение (СКО) шума.

Элементы диагонали обратной информационной матрицы Фишера соответствуют значениям дисперсии несмещенных оценок амплитуд сигналов [4]. Поскольку для практических расчетов удобно оперировать величиной среднеквадратических отклонений оценок амплитуд, соотношение для определения НГКР можно записать в виде:

$$\sigma_{a_m} \geq \sqrt{I_{m,m}^{-1}}, \quad (7)$$

где  $m = 1, 2, \dots, M$  определяет номер элемента обратной матрицы Фишера

С целью установления соответствия полученных в результате имитационного моделирования значений СКО амплитуд N-OFDM сигналов нижней границе Крамера-Рао были заданы границы доверительного интервала. Согласно [5], для ста реализаций случайного процесса при доверительной вероятности 0,999 нижняя граница доверительного интервала определяется на уровне 0,808 от НГКР, а верхняя граница — на уровне 1,29. Результаты вычислений СКО амплитуд сигналов N-OFDM, которые не выходят за пределы доверительного интервала, считаются потенциально точными.

Демодуляция сигналов N-OFDM будет безошибочной, если отклонения оценок амплитуд принятых сигналов от соответствующих амплитуд переданных несущих не будут превышать половины величины межсимвольного интервала  $\Delta a$  в заданном масштабе:

$$|\hat{a}_m - a_m| < \frac{K}{2} \Delta a, \quad (8)$$

где  $\Delta a$  — расстояние между значениями двух ближайших информационных символов, выраженное в квантах ЦАП;  $\hat{a}_m, a_m$  — амплитуды принятого и переданного сигнала N-OFDM на  $m$ -й несущей;  $K$  — масштабный коэффициент, учитывающий неидентичность межсимвольных уровней в передающем и приемном сегментах.

С учетом того, что принятый сигнал подвергается воздействию шума и амплитуды  $\hat{a}_m$  являются случайными, выражение (8) при достаточном числе опытов можно переписать:

$$|\hat{a}_{m_i} - M(\hat{A}_m)| < \frac{K}{2} \Delta a, \quad (9)$$

где  $\hat{a}_{m_i}$  — амплитуда принятого сигнала на  $m$ -й несущей в  $i$ -й реализации,  $M(\hat{A}_m)$  — математическое ожидание амплитуды принятого сигнала на  $m$ -й несущей.

Из выражений (8) и (9) следует, что для обеспечения правильного приема сигналов N-OFDM достаточно, чтобы отклонения амплитуд несущих сигнала

N-OFDM от их истинных значений (математического ожидания) не выходили за пределы интервала  $\pm 0,5K\Delta a$ .

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины  $X$  от своего математического ожидания  $M(X)$  меньше, наперед заданного положительного числа  $\delta$  равна [6]:

$$P(|X - M(X)| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \quad (10)$$

где  $\sigma$  — среднеквадратическое отклонение (СКО) случайной величины  $X$ ,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$  — функция Лапласа или интеграл вероятности.

Применительно к рассматриваемому случаю, выражение (10) можно переписать в виде:

$$P(|\hat{a}_{m_i} - M(\hat{A})| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \quad (11)$$

По соотношению (11) проведем расчет вероятности отклонения нормально распределенной случайной величины  $\hat{a}_{m_i}$  от своего математического ожидания для значений  $\delta$ , равных  $\sigma_{a_m}$ ,  $2\sigma_{a_m}$ ,  $3\sigma_{a_m}$  и  $4\sigma_{a_m}$  [6]:

$$P(|a_{m_i} - M(\hat{A})| < \sigma_{a_m}) = 2\Phi(1) \approx 0,6827;$$

$$P(|a_{m_i} - M(\hat{A})| < 2\sigma_{a_m}) = 2\Phi(2) \approx 0,9545;$$

$$P(|a_{m_i} - M(\hat{A})| < 3\sigma_{a_m}) = 2\Phi(3) \approx 0,9973;$$

$$P(|a_{m_i} - M(\hat{A})| < 4\sigma_{a_m}) = 2\Phi(4) \approx 0,99994.$$

Из полученных результатов следует, что для обеспечения правильного приема сигналов N-OFDM с вероятностью 0,9973 достаточно, чтобы отклонения амплитуд несущих от своего математического ожидания не превышали  $\pm 3\sigma_{a_m}$ .

Таким образом, задача определения потенциальной границы частотного уплотнения  $M$ -частотного сигнала N-OFDM на основе базисных функций Хартли с вероятностью правильного приема 0,9973 сводится к нахождению минимальной величины  $\xi$ , при которой еще выполняется условие:

$$\Delta a \geq 6\sigma_{a_m}, \quad (12)$$

где  $\sigma_{a_m}$  — среднеквадратическое отклонение оценок амплитуд  $M$  сигналов.

Вычислительный эксперимент проводился для 4- и 8-частотных сигналов N-OFDM с частотой дискретизации 100 МГц (0,01 мкс) и различным количеством временных отсчетов. Межсимвольный интервал  $\Delta a$  выбирался таким

образом, чтобы было обеспечено максимальное использование динамического диапазона ЦАП, и одновременно выполнялось условие (2).

Графики измеренных СКО, НГКР и границ доверительного интервала для 8-частотного сигнала N-OFDM, переданного с помощью 512-ти дискретных отсчетов, представлены на рис. 1. Из рис. 1 видно, что полученные экспериментально значения СКО не выходят за пределы доверительного интервала НГКР, а кривая значений СКО приближается к линии НГКР. Следовательно, полученные результаты являются потенциально точными.

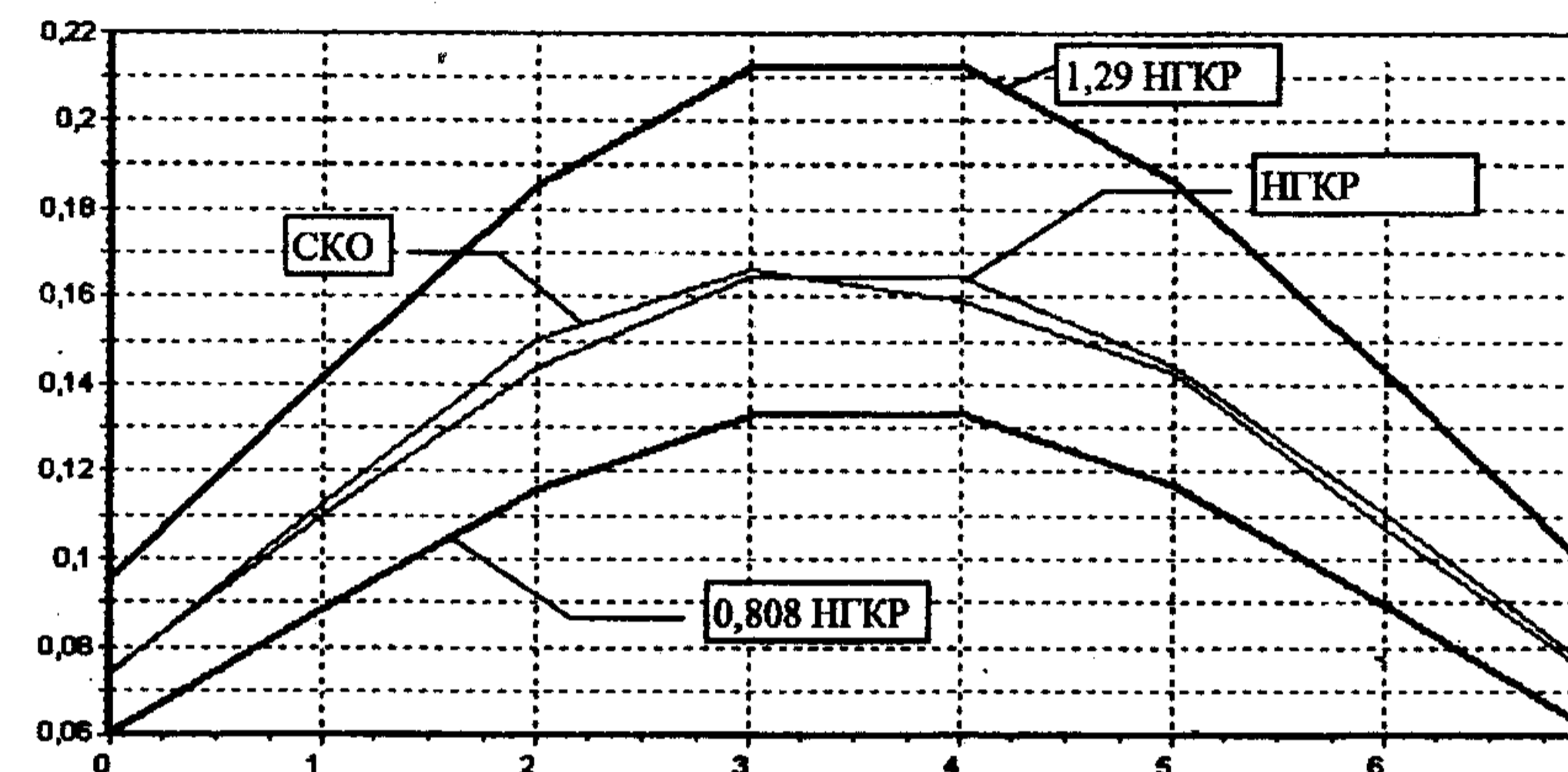


Рис. 1

В табл. 1 приведены выборочные численные значения полученных в результате моделирования СКО оценок амплитуд 4- и 8-частотных сигналов N-OFDM на основе базисных функций Хартли, а также потенциальные границы частотного уплотнения поднесущих с вероятностью правильного приема 0,9973 по 100 реализациям. При меньшей величине  $\xi$  достигается большее уплотнение по частоте (меньший частотный разнос) неортогональных сигналов. Для увеличения частотного уплотнения необходимо увеличивать количество отсчетов, подвергаемых обработке (длину выборки), что легко объясняется эффектом когерентного накопления отсчетов функции  $\cos$ .

С уменьшением расстояния по частоте между поднесущими повышается минимальная величина допустимого межсимвольного интервала по амплитуде. В расчетах по имитационной модели было принято, что максимальное значение результирующей амплитуды многочастотного сигнала, подлежащего передаче, не превышает 2047 квантов (для 12-ти разрядного ЦАП). При этом учитывалась возможность синфазного сложения  $\cos$ -функций всех поднесущих. Таким образом, если максимальная амплитуда равна 255, за один сигнальный фрейм интервал стационарности информации может быть передано 8 бит данных, если 63 — 6 бит и т. д.

Таблица 1

$\xi, \%$	$\Delta f, \text{кГц}$	количество отсчетов	номер* несущей	СКО	НГКР	Границы доверительного интервала НГКР		Максимальная допустимая амплитуда**	Минимально допустимый $\Delta a$
						нижняя	верхняя		
Для 4-частотного сигнала N-OFDM									
28,6	446,875	64	3	0,33036	0,34969	0,28255	0,4511	255	2
26,6	207,8125	128	3	0,32823	0,30795	0,24882	0,39725		
23,6	92,1875	256	2	0,33256	0,31996	0,25853	0,41274		
18,5	289,0625	64	3	1,32405	1,4608	1,18033	1,88443	63	8
17,3	135,15625	128	3	1,32078	1,25789	1,01637	1,62267		
15,2	59,375	256	2	1,32241	1,3272	1,07238	1,71208		
11,9	185,9375	64	3	5,25321	5,85147	4,72799	7,5484	15	32
11,1	86,71875	128	3	5,22604	5,04331	4,07499	6,50587		
9,7	37,890625	256	2	5,251	5,34576	4,31937	6,89603		
Для 8-частотного сигнала N-OFDM									
40,2	314,0625	128	5	0,164	0,16908	0,13662	0,21811	255	1
38,7	151,17188	256	4	0,16557	0,15691	0,12678	0,20241		
36,9	72,070313	512	4	0,16613	0,16442	0,13286	0,21211		
33,9	264,84375	128	5	0,6564	0,713	0,57611	0,91977	63	4
32,8	128,125	256	5	0,6571	0,65637	0,53035	0,84672		
31,4	61,328125	512	4	0,65904	0,66633	0,5384	0,85957		
28,8	225	128	5	2,6259	2,84633	2,29984	3,67177	15	16
27,8	108,59375	256	5	2,65987	2,63464	2,12879	3,39868		
26,5	51,757813	512	4	2,6506	2,71764	2,19585	3,50576		

\* приведены результаты вычислений, которые соответствуют несущей с наибольшим СКО.  
 \*\* максимальная допустимая амплитуда отдельных несущих сигнала N-OFDM.

Увеличение количества отсчетов АЦП сопровождалось уменьшением НГКР. Снижение показателя уплотнения  $\xi$  приводило к росту значений НГКР.

В целом результаты моделирования подтвердили возможность сузить полосу частот, занимаемую 8-частотным сигнальным пакетом, более, чем на треть по сравнению с традиционным OFDM-сигналом (табл. 1,  $\Delta a$  — межсимвольный интервал).

Таким образом, определены потенциальные границы частотного уплотнения 4- и 8-частотных сигналов N-OFDM на основе базисных функций Хартли. Полученные результаты могут быть использованы при разработке предложений и модернизации станций радиорелейной, тропосферной и космической связи.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Слюсар В. И., Смоляр В. Г. Частотное уплотнение каналов связи на основе сверхрелевского разрешения сигналов // Радиоэлектроника. — 2003. — № 7. — С. 30 – 39. (Изв. вузов.)
2. Слюсар В. И., Смоляр В. Г. Метод неортогональной дискретной частотной модуляции сигналов для узкополосных каналов связи // Радиоэлектроника. — 2004. — № 4. — С. 53–59. (Изв. вузов)
3. Слюсар В. И., Васильев К. А. Метод неортогональной частотной дискретной модуляции сигналов на основе базисных функций Хартли. // Сб. материалов 2-ого Международного радиоэлектронного форума. Том 4. — Харьков: ХНУРЭ. — 2005. — С. 224–226.
4. Бакут П. А., Логинов В. П., Шумилов Ю. П. Методы определения границ точности в задачах оценивания неизвестных параметров // Зарубежная радиоэлектроника. — 1978. — № 5. — С. 3–36.
5. Большев В. Н., Смирнов В. Н. Таблицы математической статистики // М.: Вычислительный центр АН СССР, — 1968. — 474 с.
6. Гуриев М. А. Теория вероятностей и элементы математической статистики. — М.: Воениздат, 1980. — 400 с.

Полтавский воен. ин-т связи

Поступила в редакцию 31.05.07

УДК 621.3.015.4

БЕЛОГЛАЗОВ В. В., БИРЮК Н. Д., ЮРГЕЛАС В. В.

#### АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОНТУРА МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА–ЧЕТАЕВА

Рассмотрен параметрический контур как линейный колебательный контур с положительными параметрами, изменяющимися во времени по периодическим законам с одним и тем же периодом. Тепловые потери учтены отдельно для емкости и индуктивности. Рассматривается свободный процесс в контуре. Классическим методом получены достаточные условия устойчивости общего характера, приведен анализ устойчивости конкретного контура.