

# Применение цифровой и аналоговой обработки сигналов

УДК 621.396.677

## Точность измерения угловых координат с использованием линейной цифровой антенной решетки при нарушениях работоспособности приемных каналов

В.И. Слюсар

Приведены нижние границы Крамера—Рао для дисперсий ошибок оценивания угловых координат точечных источников линейной цифровой антенной решеткой с частичными или полными нарушениями работоспособности приемных каналов в случае известных характеристик направленности.

The paper presents an analysis of the angular accuracy of the linear digital antenna array with defects of reception channels with known characteristics directivity.

Данная статья продолжает цикл работ по цифровым антенным решеткам (ЦАР), выполненный В.А. Варюхиным и его учениками [1, 2]. Будучи ориентированными на возможности имевшихся вычислительных средств, соответствующие публикации по вопросам угловой точности ЦАР, в частности, [1, 2], ограничивались в основном рассмотрением идентичных характеристик приемных каналов.

Цель работы — определение нижних границ Крамера—Рао достижимой угловой точности линейной ЦАР с частичным либо полным нарушением работоспособности отдельных приемных каналов.

Приводимый здесь материал затрагивает преимущественно анализ точности методов оценивания угловых координат точечных источников, предложенных в [3, 4]. При этом под частичным нарушением работоспособности канала будет подразумеваться отклонение дисперсии его шумов от номинального значения.

Итак, рассмотрим линейную ЦАР из  $K$  эквидистантно размещенных элементов, один из которых выбран по каким-либо соображениям в качестве реперного. Полагая характеристики направленности (ХН) приемных каналов комплексными, опишем отклик ЦАР на точечный источник плоской электромагнитной волны в виде набора из  $K$  напряжений:

$$\dot{U}_k = U_k^c + iU_k^s = \dot{a}F_k \exp(ix_k) + \dot{n}_k =$$

$$= [a^c F_k^c - a^s F_k^s] \cos x_k - \sin x_k [a^s F_k^c + a^c F_k^s] +$$

$$+ i\{[a^c F_k^c - a^s F_k^s] \sin x_k + [a^s F_k^c + a^c F_k^s] \cos x_k\} + \dot{n}_k \quad (1)$$

где  $\dot{a} = a^c + ia^s$  — комплексная амплитуда сигнала в реперном канале;  $\dot{F}_k = F_k^c + iF_k^s$  — комплексная ХН  $k$ -го приемного канала в направлении  $x$ , нормированная к модулю ХН реперного канала;  $x_k = x(k-z)$  ( $z$  — координата точки на апертуре антенны, выбранной в качестве фазового центра решетки;  $x = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$  — обобщенная угловая координата источника;  $\lambda$  — длина волны излучения;  $d$  — шаг решетки;  $\theta$  — угол между направлением на источник и нормалью к решетке);  $\dot{n}_k$  — комплексное значение шума в  $k$ -м канале.

В отношении шумов будем полагать, что они гауссовские, некоррелированы, имеют нулевые средние и одинаковые дисперсии квадратурных составляющих в отдельно взятом канале.

Для оценки потенциальной точности измерения обобщенной координаты  $x$  сформируем на основании (1) логарифмический эквивалент функции правдоподобия, который с точностью до постоянного множителя  $C$  можно записать в виде

$$L = \ln C - \frac{1}{2} \sigma_{\text{ш}}^{-2} \sum_{k=1}^K \frac{1}{p_k^2} \{ [U_k^c - [a^c F_k^c - a^s F_k^s] \cos x_k + [a^s F_k^c + a^c F_k^s] \sin x_k]^2 + \{ U_k^s - [a^c F_k^c - a^s F_k^s] \times \sin x_k - [a^s F_k^c + a^c F_k^s] \cos x_k \}^2 \}, \quad (2)$$

где  $p_k^2$  — коэффициенты, учитывающие разброс дисперсий шумов в приемных каналах ЦАР относительно дисперсии шума  $\sigma_{\text{ш}}^2$  в реперном канале.

Полагая, что в интересующем пространственном секторе ХН каналов известны и не зависят от направления прихода сигнала, несложно получить нижнюю границу Крамера—Рао для дисперсии несмещенной оценки  $x$  при неизвестной начальной фазе сигнала

$$\sigma_x^2 \geq \frac{\sigma_{\text{ш}}^2}{a^2} \left\{ \sum_{k=1}^K \frac{(k-z)^2}{p_k^2} [F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2] - \frac{\left( \sum_{k=1}^K \frac{(k-z)}{p_k^2} [F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2] \right)^2}{\sum_{k=1}^K (F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2) p_k^{-2}} \right\}^{-1}, \quad (3)$$

где  $a$  — модуль амплитуды сигнала в реперном канале.

Полученное соотношение представляет собой адаптированный применительно к ЦАР вариант нижней границы дисперсии оценки угловой координаты, приведенной в [5]. Чтобы убедиться в этом, достаточно переписать (3) в традиционном виде

$$\sigma_x^2 \geq [A^2 L_{\text{СК}}^2]^{-1}, \quad (4)$$

где  $A^2 = \frac{1}{\sigma_{\text{ш}}^2} \sum_{k=1}^K \frac{(F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2) a^2}{p_k^2}$  — энергетическое отношение сигнал-шум на выходе приемных каналов ЦАР;

$$L_{\text{СК}}^2 = \frac{\sum_{k=1}^K \frac{(k-z)^2 (F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2)}{p_k^2}}{\sum_{k=1}^K (F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2) p_k^{-2}}$$

$$- \frac{\left[ \sum_{k=1}^K \frac{(k-z)(F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2)}{p_k^2} \right]^2}{\sum_{k=1}^K (F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2) p_k^{-2}}$$

— центрированная среднеквадратическая протяженность раскрыва антенны.

Отсутствие в (4) привычных  $2\pi$  и  $\lambda$  объясняется тем, что оно характеризует угловую точность ЦАР в долях обобщенной угловой координаты  $x$ . При полной идентичности приемных каналов (3) легко преобразуется в оценку [6] и далее — в известную по [1] зависимость.

Существенно, что значение  $\sigma_x^2$  не зависит от положения фазового центра решетки. В этом несложно убедиться, продифференцировав (3) по координате  $z$ .

Что касается других свойств дисперсии  $\sigma_x^2$ , то для их иллюстрации можно воспользоваться результатами статистического моделирования соответствующего ей одноцелевого алгоритма [3], учитывающего неидентичность дисперсий шумов в первичных каналах. Суть его сводится к максимизации выражения

$$L_M = [\tilde{U}^c{}^2 + \tilde{U}^s{}^2] \left( \sum_{k=1}^K [F_k^c{}^2 + F_k^s{}^2] p_k^{-2} \right)^{-1} = \max, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}^c &= \sum_{k=1}^K p_k^{-2} \{ U_k^c [F_k^c \cos x_k - F_k^s \sin x_k] + \\ &+ U_k^s [F_k^s \cos x_k + F_k^c \sin x_k] \}; \\ \tilde{U}^s &= \sum_{k=1}^K p_k^{-2} \{ U_k^s [F_k^c \cos x_k - F_k^s \sin x_k] - \\ &- U_k^c [F_k^s \cos x_k + F_k^c \sin x_k] \}, \end{aligned}$$

например, путем перебора возможных значений обобщенной угловой координаты  $x$ . Заметим, что при выводе (5) вместо квадратурных составляющих амплитуд сигналов в [3] были использованы их оценки, выраженные с помощью уравнений правдоподобия через напряжения приемных каналов и координату  $x$ . Соответствующая методика рассмотрена в [7].

На рис. 1 приведены выборочные значения среднеквадратического отклонения (СКО) ошибки оценивания обобщенной координаты  $x$  по 100 реализациям, нормированные для удобства к величине  $2\pi/K$ , где  $K$  — число элементов решетки, равное в данном случае 16 и 32. По горизонтальной оси отложено отношение сигнал-шум для реперного канала



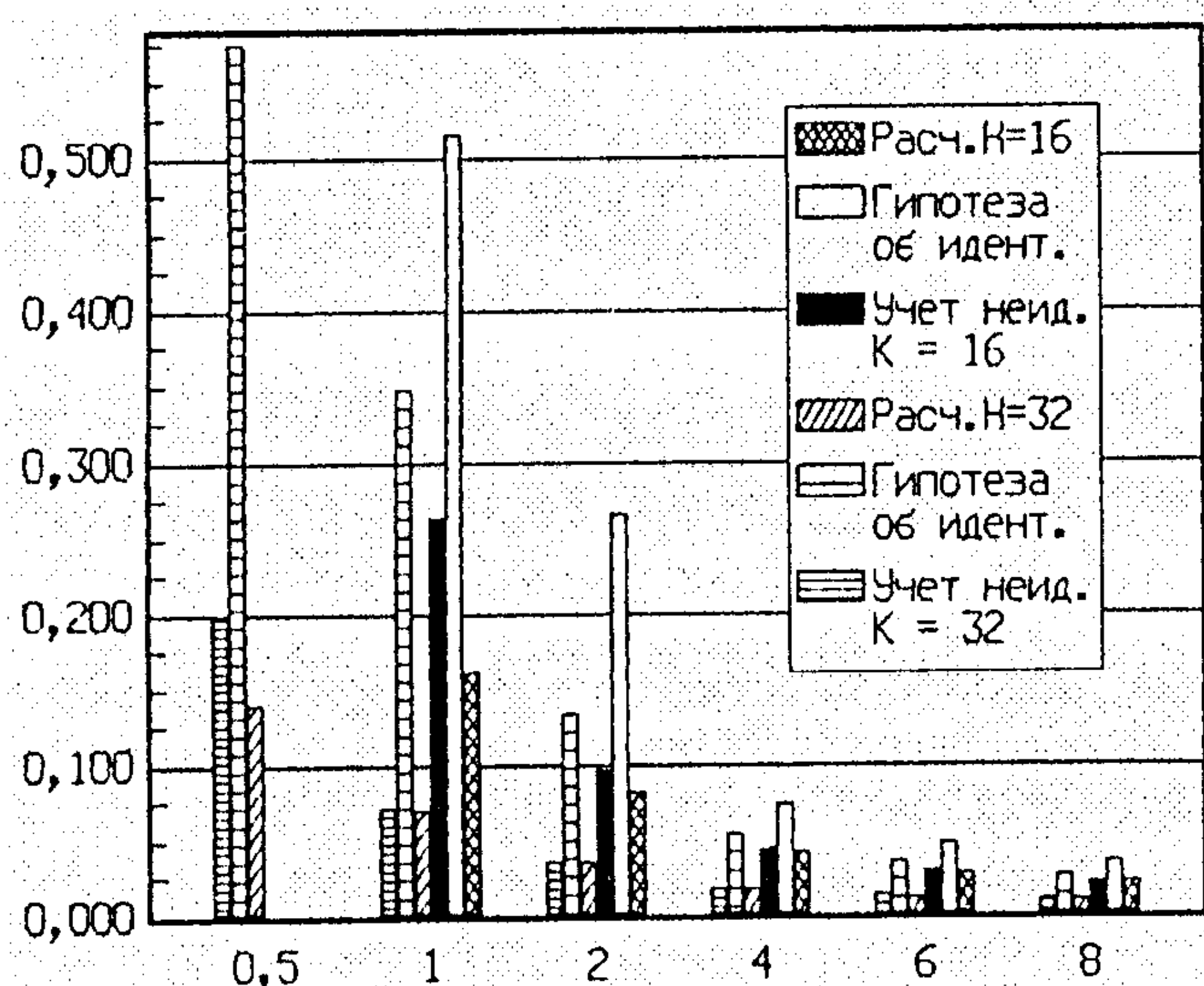


Рис. 1

ЦАР, по вертикальной — нормированное СКО ошибки оценивания  $\sigma_x$ . На диаграммах отражены значения  $\sigma_x$ , соответствующие результатам статистического моделирования алгоритма (5) ("Учет неид."), процедуры измерения, ориентированной на идентичные каналы ЦАР ("Гипотеза об идент."), и расчетные значения нормированного СКО, полученные с учетом (3) для алгоритма (5) ("Расч.  $K=32(16)$ "). При этом левая тройка столбцов на диаграммах соответствует 32-элементной ЦАР, правая —  $K=16$ . В отношении всех каналов было принято допущение, что  $F_k^s=0$  и  $F_k^c=1$ . Поскольку при единичном отношении сигнал-шум (в реперном канале) для  $K=16$  наблюдалось существенное расхождение рассчитанного по (3) значения дисперсии и ее величины, полученной в результате статистического моделирования, дальнейшее снижение энергии сигнала при исследовании точности процедуры (5) для  $K=16$  было лишено смысла. По этой причине координате на оси абсцисс, равной 0,5, на рис. 1 соответствуют только данные для решетки с числом элементов 32. Представленные результаты имели место при разбросе величин  $p_k$  по нормальному закону с СКО их значений, равном 2. При этом отношение максимального коэффициента  $p_k$  к минимальному составило около 20. Подобная неидентичность шумовых характеристик вряд ли может иметь место в нормально функционирующих РЛС, однако ее вполне можно принять во внимание, учитывая возможность нарушений работоспособности отдельных каналов ЦАР, например, вследствие плохого контакта в раз'емах сигнальных или питающих линий, обрыва магистралей "корпуса" и т.п. К тому же, данный пример весьма наглядно демонстрирует справедливость полученной оценки точности в та-

ких специфичных условиях, когда другие известные оценки непригодны.

Для более сглаженных флуктуаций дисперсий шумов преимущество в точности при учете неидентичностей может быть не столь внушительным. В частности, при СКО значений  $p_k$ , равном 0,3, когда максимальный разброс дисперсий шумов не превышал 3,55 раз, выигрыш в  $\sigma_x$  по результатам моделирования составил около 30%. Следует подчеркнуть, что при неизменном наборе коэффициентов  $p_k$  конкретные значения  $\sigma_x$  разнятся в зависимости от закона изменения дисперсий шумов по полотну ЦАР. Так, расположение слабошумящих каналов по периферии антенной системы сопровождается меньшей погрешностью пеленгации по сравнению с локализацией их в центре решетки.

Продолжая анализ полученных оценок дисперсий, нельзя не остановиться на еще одном важном их свойстве. Дело в том, что при замене коэффициентов  $p_k^{-2}$ , например, на  $t_k = \{0; p_k^{-2}\}$ , данные соотношения позволяют охарактеризовать минимально достижимые дисперсии ошибок оценивания при наличии в ЦАР отказавших каналов. Соответствующие модификации измерительных процедур [3], позволяющие оценивать угловые координаты по выходным напряжениям нормально функционирующих каналов, приведены в [4]. Что же касается обеспечиваемой ими точности измерения, то для анализа таковой воспользуемся модифицированным вариантом дисперсии (3)

$$\sigma_x^2 \geq \frac{\sigma_{ш}^2}{a^2} \left\{ \sum_{k=1}^K t_k (k-z)^2 [F_k^c + F_k^s] - \frac{\left( \sum_{k=1}^K t_k (k-z) [F_k^c + F_k^s] \right)^2}{\sum_{k=1}^K t_k (F_k^c + F_k^s)} \right\}. \quad (6)$$

Результаты непосредственного расчета оценки (6) при различных соотношениях числа работоспособных ( $t_k=1$ ) и отказавших ( $t_k=0$ ) каналов, произвольной локализации последних и фиксированном отношении сигнал-шум приведены на рис. 2. На рис. 2,а представлены значения дисперсии (6), рассчитанные для линейной восьмиканальной ЦАР с одинаковым отношением сигнал-шум во всех каналах, равном 1, и единичными модулями ХН. При этом рассматривался случай одного отказавшего приемника ("1 отказ") и пары соседних ("2 отказа"). Вдоль оси абсцисс в верхнем ряду указан номер единственного деградировавшего канала, которому



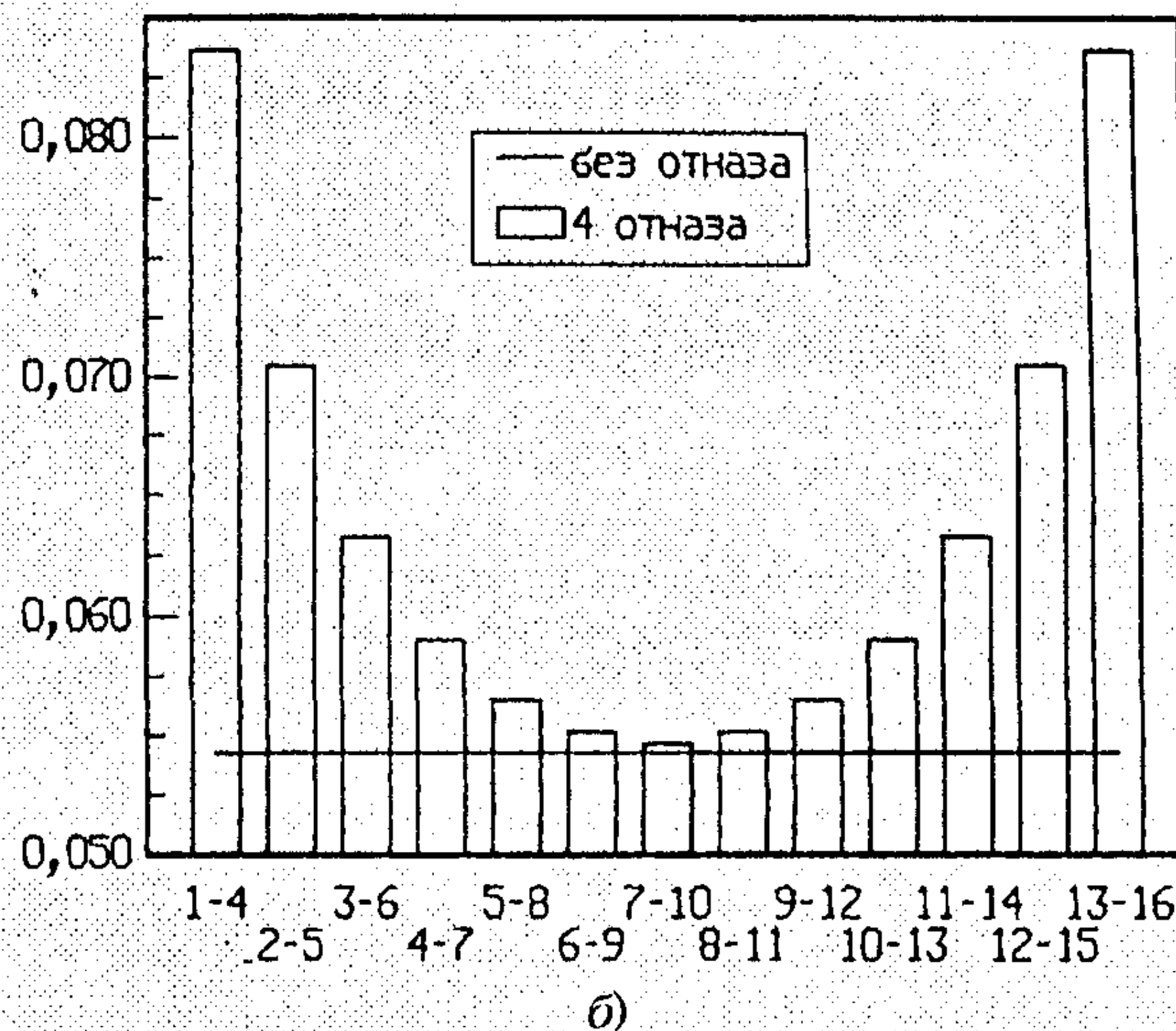
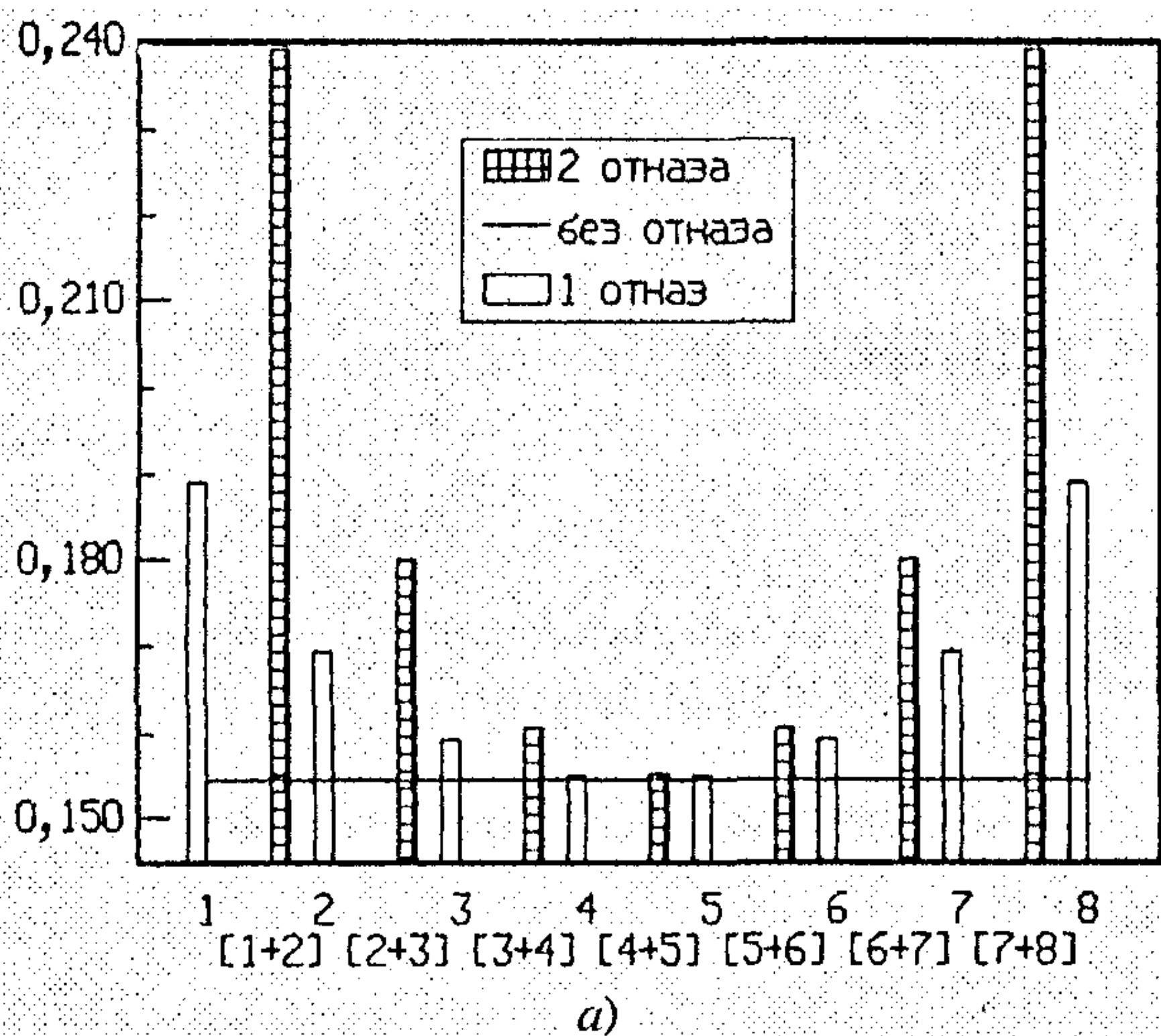


Рис. 2

соответствует дисперсия, отмеченная на диаграмме незакрашенным прямоугольником. В нижнем ряду вдоль оси абсцисс приведены номера пар соседних отказавших каналов. Для сравнения сплошной линией ("без отказ.") отмечена дисперсия, полученная по (6) при том же отношении сигнал-шум и полностью работоспособных приемниках ( $t_k=1$  для всех  $k$ ). На рис.2,б для тех же ХН и отношений сигнал-шум приведена зависимость расчетной дисперсии  $\sigma_x^2$  от положения группы из четырех отказавших каналов в линейной 16-канальной ЦАР. Вдоль оси абсцисс отмечены номера вышедших из строя приемников, по вертикальной оси — значения дисперсии  $\sigma_x^2$ , соответствующей той или иной картине отказа. Полностью работоспособная ЦАР из 16 каналов характеризуется точностью пеленгации одиночного источника, отмеченной по-прежнему сплошной линией ("без отказ."). Нетрудно заметить, что при увеличении количества элементов ЦАР потеря части из них становится менее ощутимой. Характерно, что минимум дисперсии (б) достигается при сосредоточении рабочих каналов по периферии решетки, что лишней раз подтверждает известный в теории факт: "максимальная точность достигается, когда функция раскрыва имеет вид двух прямоугольников, максимально разнесенных "на краях" [8]. Случай, когда все  $M$  исправных приемников сосредоточены в непрерывной группе, как и следовало ожидать, оказался эквивалентным выполнению измерений  $M$ -канальной ЦАР.

нальных пеленгационных процедур в случае отказов в каналах приема ЦАР. Как показали результаты статистического моделирования, учет нарушений работоспособности при оговоренных выше условиях может сопровождаться заметным выигрышем в точности пеленгации при неизменной мощности передатчика. В случае невозможности ликвидации отказа его влияние на угловую точность поддается ограничению как путем соответствующей адаптации процедур пеленгации, так и перемещением отказавших каналов к центру решетки.

### Литература

1. Варюхин В.А., Покровский В.И., Сахно В.Ф. — Радиотехника и электроника, 1982, т.27, №11.
2. Варюхин В.А., Покровский В.И., Сахно В.Ф. — Радиотехника и электроника, 1984, т.29, №4.
3. Покровский В.И., Слюсар В.И. Решение измерительных задач в РЛС на базе ЦАР при неидентичности первичных каналов. — Киев, 1992. — Деп. в УкрИНТЭИ 17.12.92, №1995 — Ук 92.
4. Слюсар В.И., Храпейчук Г.А. Методы предотвращения информационных потерь в РЛС с цифровой обработкой сигналов при перегрузках АЦП. — Киев, 1993. — Деп. УкрИНТЭИ 16.02.93, №182 — Ук 93.
5. Фалькович С.Е., Хомяков Э.И. Статистическая теория измерительных радиосистем. — М.: Радио и связь, 1981.
6. Бреннан Л. — Зарубежная радиоэлектроника, 1962, №1.
7. Варюхин В.А., Покровский В.И., Сахно В.Ф. — Доклады АН СССР, 1983, т. 270, №5.
8. Теоретические основы радиолокации /Под ред. В.Е. Дулевича. — М.: Сов. радио, 1964.

Поступила после доработки 26 мая 1997 г.

● Рассмотренные оценки нижних границ Крамера—Рао позволяют судить о точности односиг-